

IL RUOLO DELLA FISICA MATEMATICA NELL'ELABORAZIONE DEL CONCETTO DI BIODIVERSITA'

30 Aprile 2008
Conferenza del Prof. Spotorno

“Fondamenti fisico matematici della biodiversità” è il tema di questa mia conversazione.

L'etimo della parola “biodiversità” è del tutto evidente: induce a pensare a ciò che è impensabile, a pensare cioè alla sterminata varietà degli esseri viventi, dove con “vivente” voglio intendere ogni essere che appartenga, così come si dice nelle scienze naturali, ai grandi Regni, il Regno animale e quello vegetale.

Che cosa può allora dire al riguardo di questa sterminata varietà di forme la Fisica e poi la Matematica? La risposta è ovvia: basta ricordare con Galilei che il gran libro della natura è appunto scritto nel linguaggio matematico. La Fisica, con gli strumenti di calcolo e di descrizione offerti dalla matematica, si occupa a livello microscopico di ciò che soggiace alle descrizioni che, a livello macroscopico, le Scienze naturali e fra esse la Biologia danno delle “cose” che alla biosfera appunto appartengono.

E' dunque del tutto naturale che abbia assunto come guida alla mia conversazione un testo classico, redatto negli anni 70 dal premio Nobel per la Biologia Jacques Monod: “Il caso e la necessità” (Jacques Monod, *Il caso e la necessità*, 1974, Mondadori)

Ecco ora leggerò un breve brano tratto da quel testo e poi svilupperò la mia conversazione commentando, alla luce dei saperi fisici e matematici le frasi significative che quel testo compongono.

In chiusura la citazione dei punti di vista di alcuni fra i maggiori esponenti della cultura scientifica contemporanea vuole invitare alla modestia ed alla prudenza nella formulazione “definitiva” di giudizi sul tema (ma forse in ogni altra occasione) argomento di queste giornate culturali.

IL TESTO

«Gli eventi iniziali elementari, che schiudono la via dell'evoluzione ai sistemi profondamente conservatori rappresentati dagli esseri viventi sono microscopici e fortuiti. Ma una volta iscritto nella struttura del DNA, l'**avvenimento singolare**, e in quanto tale essenzialmente imprevedibile, verrà automaticamente e fedelmente replicato. **Uscito dall'ambito del puro caso (1)**, esso entra in quello della **necessità (2)**.

La selezione opera in scala **macroscopica (3)**.

Il fattore decisivo della selezione non è costituito dalla lotta per la vita, ma dal tasso differenziale di riproduzione in seno ad una specie **(4)**.

Una mutazione semplice, puntiforme, quale la sostituzione nel DNA di una lettera del codice a un'altra, è **reversibile**. La teoria lo prevede, l'esperienza lo conferma. Ma qualsiasi evoluzione sensibile è il risultato di un gran numero di mutazioni indipendenti, accumulate successivamente nella specie originale. A causa del numero di **avvenimenti indipendenti** di cui costituisce il risultato, un simile fenomeno è **statisticamente irreversibile (5)**.

L'evoluzione nella biosfera è dunque un processo necessariamente irreversibile che definisce una direzione nel tempo, direzione che è identica a quella imposta dall'aumento

dell'**entropia**, cioè dal secondo principio della termodinamica. Il secondo principio si basa su considerazioni statistiche pari a quelle che stabiliscono l'irreversibilità della evoluzione: **è legittimo considerare quest'ultima come una sua espressione nella biosfera.»**

J. Monod, *Il caso e la necessità*, 118 e seg.

(I numeri posti in apice a frasi successive verranno ripresi come numerazione dei paragrafi di questa relazione)

Commenti

A. IL RUOLO EPISTEMICO DELLA PROBABILITÀ

I punti 1), 2), 3), 4) dei commenti che seguono sono dedicati a porre in luce l'incrollabile fede dei fisici e dei matematici dei secoli XVII-XVIII nel carattere deterministico della loro scienza. La **probabilità** entra nel discorso scientifico solo come un supporto in linea di principio non necessario: in questo senso essa viene detta "**epistemica**"

Una differenza di non piccolo conto passa tuttavia fra il punto di vista che soggiace alle riflessioni esposte nei punti 1), 2), 3) e quelle del punto 4). Essa deve essere espressa con la parola "tempo": le leggi che regolano la "necessità" non prevedono nell'ordinamento dei fatti un "verso" (dal passato verso il futuro). Il concetto di "**entropia**" introdotto al punto 4) consente di esprimere questo **ordinamento**.

Compleanni al "party"

1.

"Uscito dall'ambito del puro **caso**"

La misura del caso si dice **probabilità**.

Viene introdotta una prima parola, la parola "caso", una parola chiave nel seguito del testo e della conversazione. Nel discorso matematico essa viene associata alla parola "**probabilità**" che del caso appunto vuole esprimere la misura. Misurare ciò che è casuale?

Uomini di genio (Tommaso, Galilei, Keplero, Pascal, ...) si sono cimentati con successo nel compito. Fra tutti mi piace ricordare un Maestro per quanti in tempi ormai lontani si occupavano di ricerca nel campo della didattica della Matematica: Bruno De Finetti.

Ecco una sua splendida e significativa pagina.

«Tutti e sempre ci troviamo - nei confronti di tutte o quasi le cose- in condizioni di **incertezza**.

Incetenza in ogni senso.

Incetenza circa le situazioni di fatto, presenti e passate, causa mancanza o incompletezza o inattendibilità delle conoscenze e informazioni avute a disposizione per apprenderne qualche cosa, e delle documentazioni o della nostra o altrui memoria utilizzate per conservarne convincente ricordo.

Incetenza nelle previsioni, che non verrebbe eliminata o sminuita neppure accogliendo nel senso più assoluto il principio (d'altronde non più di moda) del determinismo, dato che permarrebbe comunque la già detta insufficiente conoscenza della situazione iniziale e delle presunte leggi, ed anche supponendo eliminate tali insufficienze permarrebbe l'impossibilità pratica di svolgere i calcoli senza l'aiuto del demone di Laplace.

Incetenza di fronte alle decisioni: incetenza più che mai, in tal caso, molteplice, perché le decisioni debbono poggiare su conoscenze della situazione di fatto, che sono incerte, orientarsi su delle previsioni di eventi incontrollabili, che sono incerte, e proporsi come fine certi desiderabili effetti delle decisioni stesse, e questi sono ancora incerti.»

De Finetti è il padre della cosiddetta concezione soggettivista della “probabilità”. Ciò che è probabile non può essere inquadrabile in predefiniti schemi di calcolo. Più che una teoria matematica ricorda una visione filosofica: la probabilità è il prezzo che ognuno di noi è disposto a pagare nella incertezza del realizzarsi di un fine da noi auspicato. TU sei il responsabile del tuo destino.

E' ovvia l'importanza educativa della scelta, ma è altrettanto ovvio che il soffermarsi su questo tema va al di là degli obiettivi di questa conversazione.

Più banalmente ricorderò la definizione classica di probabilità, definizione che si fa risalire a Laplace (1812): «La probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili, qualora nulla ci possa indurre a pensare che un caso debba verificarsi più facilmente degli altri, cosa questa che, per noi, li rende egualmente possibili, cioè casi che si verificano, a nostro giudizio, con uguale facilità»

Compleanni al “party”

Pascal Dupont (senza troppa ironia: *nomen, noumen?*), un insegnante di calcolo delle probabilità presso l'Università di Torino negli anni 80, era una sera mio ospite a cena. Con fare sornione, ben consapevole della mia ignoranza, mi propose il quesito: “se fossero con noi una ventina di persone, quanto pensi sarebbe la probabilità che, diciamo, almeno due fra esse festeggerebbero il loro compleanno in uno stesso giorno dell'anno?”

.....???????

“Voglio dire: una probabilità alta, bassa, ...10%,..., 90% ...?”

Mi faccio coraggio e sparo: diciamo che la probabilità ... mi pare ... forse è ... si è bassa.

Naturalmente, sorriso ironico di Dupont: “60 e passa per cento”

..... ?!!!!..... Veramente?

Si, così profetizza il calcolo delle probabilità (Non resisto: che cosa so per pagare quel prezzo, voglio dire per esprimere quella probabilità? Come è composto il gruppo dei partecipanti al “party”? Di quali tavole demografiche sono in possesso?Sono un inguaribile “soggettivista”)

Da allora ho fatto caso ai compleanni e in verità ho dovuto constatare che Dupont (Il calcolo delle probabilità) aveva ragione.

Come si calcola, grosso modo, questa percentuale?

Ecco un esempio.

Metti in una urna 10 palline numerate da 1 a 10. Estrai una pallina, leggi il suo numero, riponi la pallina nell'urna. Estrai una seconda pallina, leggi il suo numero, riponi. Conveniamo di dire che i due numeri di cui hai preso nota costituiscono una “coppia possibile”.

Quante sono in questo esempio le coppie possibili? Molte. Sono cento:

(1,1) (1,2) (1,3) ... (1,10)

(2,1) (2,2) (2,3) ... (2,10)

.....

(10,1) (10,2) (10,3) ... (10,10)

Quante le coppie costituite da numeri fra loro eguali? Ovviamente 10

(1,1) (2,2) (3,3) ... (10,10)

Dunque, se a caso, estraggo dall'urna due palline e dopo ogni estrazione ripongo la pallina estratta, ebbene in dieci casi su cento estrarrò (forse) due palline egualmente numerate!

Si usa dire: la probabilità di estrarre due palline egualmente numerate è del 10%.

E' con ragionamenti di questo tipo che viene valutata la probabilità dei compleanni: le palline da porre nell'urna sono 365! Se le persone che partecipano al "party" sono 20 si estrarranno 20 palline alla volta e poi... e poi i calcoli diventano complicati, ...roba da addetti ai lavori. (Dupont garantisce che si arriva ad una decisione)

Ma è vero che le cose stanno così?

La parola "verità" non appartiene al calcolo del "probabile".

Possiamo fare delle prove, nulla di più.

Ad es. con una moneta. Si gioca a testa e croce. Ecco supponiamo che in 1000 lanci successivi sia venuto **sempre** "testa". Vuoi scommettere sull'uscita di "croce" nel lancio successivo? NON farlo: potrebbe uscire ancora "testa". Molti sono i suicidi al gioco della roulette.

2.

"Uscito dall'ambito del puro caso, esso entra in quello della **necessità**"

Necessità. Quale il senso di questa parola?

Certo un senso antico.

Le citazioni lusingano.

Ecco come si esprime Eschilo (524 ac):

*"Alto volai nel cielo del sapere:
di dottrine molteplici il concetto
a coglier giunto cosa non vidi
che di necessità la ferrea legge
superare potesse*

Alceste : terzo stasimo. Versi 963 e seg.

Ma poi Epicuro (242 ac)

« Era meglio credere ai miti sugli dei piuttosto che esser schiavi del destino dei fisici che ha implacabile necessità »

Le leggi di natura enunciate dalla fisica esprimono dunque una conoscenza ideale che raggiunge la certezza?

Mi avevano avvertito. Il prof A.G., quello a cui debbo, con riconoscenza, di aver intrapreso la professione di insegnante di Matematica e Fisica, dunque mi avevano avvertito: un bel giorno sarebbe arrivato in classe con tuba e stoffelius per enunciare i principi della meccanica di Newton. Quel giorno in effetti arrivò. Non portava la tuba né indossava lo stoffelius, ma esibiva una bella e folta barba bianca e con enfasi enunciò:

"Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis statum illum mutare"

Così, in latino. Esattamente come lo aveva dettato Newton nel 1687 e che oggi compare a pag.12 nella edizione del 1721 dei "Philosophiae naturalis principia Mathematica".

E già eravamo allievi del Liceo classico!

Veniva enunciata la legge di inerzia: “Ogni corpo persevera nel suo stato di quiete ovvero di moto rettilineo uniforme, se non interviene una forza esterna a modificare quello stato di moto”

Che cosa mantiene inalterato nel cielo il moto della Luna? Forse, come dice Pirandello , un filo di refe che la lega alla Terra? O così è, perché così deve essere, perché *cosa non vidi che di necessità la ferrea legge superare potesse*. La necessità dunque che regola il moto dei pianeti, del sistema solare, della nebulosa cui il sistema appartiene, delle nebulose e degli ammassi di nebulose che nell’Universo si muovono.

Oggi le cose si dicono in modo diverso. Mi riferisco alle lezioni di meccanica di L. D. Landau e E. M. Lifsic (L. D. Landau e E. M. Lifsic, *Mehanika*, Mosca, 1958; *Meccanica*, Boringhieri, 1965).

Nel nuovo schema descrittivo le cose di questo mondo svaniscono in un sistema detto di “punti materiali”. Si dice: l’assegnazione a un certo istante di tutte le posizioni e di tutte le velocità dei punti del sistema permette di predirne il moto successivo.

A un patto.

Se è noto che i punti non interagiscono fra loro, allora essi perseverano *in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum*.

Se così non è, e molto spesso così non è, occorre conoscere una funzione delle posizioni dei punti detta “Energia interna del sistema”. In tal caso il meccanismo è questo: se si sa come varia l’energia del sistema al variare della posizione dei punti, allora si sa anche come essi si muoveranno. Si dice: si sa come evolve il sistema.

Lo scetticismo è d’obbligo. “Mais voilà” cento anni della recente storia della tecnologia ...

Anche Laplace (Pierre Simone, 1749-1827), uno dei fondatori della moderna meccanica, sentiva tutto il peso della possibile incredulità. E si affida al calcolo delle probabilità. Ma nella prefazione al suo *Saggio filosofico sulle probabilità*, un testo del 1814: così si giustifica

«Dobbiamo quindi considerare lo stato dell'universo come l'effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un'intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la collocazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottoporre questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi»

3.

“Ma una volta iscritto nella struttura del DNA, **l’avvenimento singolare, e in quanto tale essenzialmente imprevedibile**, verrà automaticamente e fedelmente replicato. **Uscito dall’ambito del puro caso**, esso entra in quello della **necessità**.”

La selezione opera in scala **macroscopica” (3)**.

In questa prospettiva un nuovo principio, si usa dire un principio **olistico**, corrisponde al tipo di intelligibilità della natura che caratterizza la scienza e, si badi, tipo di intelligibilità

che resta nell'ambito proprio anche quando, usando strumenti di natura probabilistica, si passi dallo studio di fatti "individuali" (ogni ente di natura singolarmente preso dai più grandi corpi all'atomo più leggero) a quello di **fatti collettivi** in cui l'impossibilità di dominare "distributivamente" i molti induce, tramite appunto il calcolo delle probabilità, al loro studio collettivo.

La "probabilità" così come viene proposta da Laplace non contraddice la necessità: i filosofi della scienza dicono che è di natura "epistemica". **L'epistemé**; ciò che sta fuori. Non siamo dei, lo sappiamo e non vogliamo ripetere quanto accadde a Prometeo.

"**Prometeo**" è parola di origine greca: Pro- metheus: conoscere in anticipo.

Prometeo, figlio di Gea, la madre terra, sa che il futuro appartiene a chi sa servirsi della conoscenza e per questo dona agli uomini la tecnica.

Anche "tecnica" è parola di origine greca, e Platone spiega che "**téchne**" significa "essere padrone e disporre della propria mente".

A differenza dell'animale che vive nel mondo stabilizzato dall'istinto, **l'uomo, per la carenza della sua dotazione istintuale, può vivere solo grazie alla sua azione**, solo grazie a quelle procedure tecniche che ritagliano nel mondo, un mondo per l'uomo.

In questo senso si può dire che la tecnica è l'essenza dell'uomo, non solo perché, a motivo della sua insufficiente dotazione istintuale, l'uomo, senza la tecnica non sarebbe sopravvissuto, ma anche perché attraverso le procedure tecniche ha raggiunto culturalmente quella selettività e stabilità che l'animale possiede per natura.

Per questo dono Prometeo è punito da Zeus:

*« Ecco l'estrema plaga della terra,
lo Scizia solitario, inaccessibile.
... ..; ora avvincerai il colpevole
a queste rocce ardue sull'abisso
con catene più dure del diamante.
La luce artefice di tutto , il fuoco,
.... egli ha rubato
e ne ha fatto partecipi i mortali. »*

(Euripide , "Prometeo incatenato" vv 6-8)

(La scena si apre sul Caucaso dove un'aquila rode a Prometeo il fegato che di continuo si riforma per l'eternità della pena).

Ecco, proprio perché non siamo dei, né ci prefiggiamo di esserlo, dobbiamo dire che la probabilità di cui ci serviremo nel progetto delle nostre macchine tecnologiche è epistemica: dobbiamo usare il calcolo della probabilità proprio perché non siamo in grado di sapere "ciò che sta fuori", l'episteme appunto.

4.

"Il fattore decisivo della selezione NON è costituito dalla lotta per la vita , ma **dal tasso differenziale di riproduzione** in seno ad una specie.

Una mutazione semplice, puntiforme, quale la sostituzione nel DNA di una lettera del codice a un'altra, è reversibile. La teoria lo prevede, l'esperienza lo conferma. Ma qualsiasi

evoluzione sensibile è il risultato di un gran numero di mutazioni **indipendenti**, accumulate successivamente nella specie originale. A causa del numero di avvenimenti indipendenti di cui costituisce il risultato, **un simile fenomeno è statisticamente irreversibile.**”

4.1

In questo passo del testo vengono proposti argomenti decisivi per la comprensione del tema espresso con la parola “evoluzione”.

In primo luogo si afferma che il fenomeno “evoluzione” non ha nulla a che vedere con una “mutazione semplice, puntiforme, quale la sostituzione nel DNA di una lettera del codice a un'altra”.

Si dice poi che l'evoluzione è un fenomeno che interessa “**popolazioni**” e non singoli individui.

Charles Darwin nella sua opera “L'origine della specie”, una delle opere più grandi della letteratura scientifica mondiale (pubblicata nel novembre del 1859 dall'editore londinese John Murray), formulò il “principio della selezione naturale” o più esattamente (così come poi lo enunciò nel 1872) il “principio della conservazione o sopravvivenza del più adatto”.

Un principio che appunto ha suggerito il concetto di “lotta per la vita” e pertanto la sopravvivenza del “più adatto”

Ma chi è il più adatto? Si deve forse dire “quello che alla fine risulta colui che sopravvive? Il principio di Darwin si riduce forse ad una tautologia?”

Potrebbe anche essere vero.

Monod afferma che “qualsiasi evoluzione sensibile è il risultato di un gran numero di mutazioni **indipendenti**, accumulate successivamente nella specie originale”.

L'indipendenza di cui Monod parla avrebbe come presupposto la completa eguaglianza delle proprietà dinamiche di tutti i portatori materiali della evoluzione. Una ipotesi non sostenibile se si pensa che in sistemi così complessi come gli organismi viventi, è impossibile calcolare in precedenza i fattori decisivi di vita o di morte e prevedere così quale tra i concorrenti sia “il più adatto”.

Si ripresenta la situazione cui si riferisce Laplace nella sua introduzione al calcolo delle probabilità: sono i fatti microscopici che stanno all'origine della evoluzione, ma quei fatti elementari non sono alla portata delle nostre deduzioni. Dunque alla newtoniana loro descrizione dobbiamo sostituire una descrizione statistica, di natura probabilistica. Ovviamente una probabilità epistemica.

In effetti la struttura logica della selezione si manifesta solo a livello di popolazioni di macromolecole che si auto replicano e solo in tale “ambiente” si riesce a ricondurre il concetto del più adatto a parametri di termodinamici.

Avviene pertanto che il “principio della conservazione o sopravvivenza del più adatto”, da Darwin formulata in base alle sue acute osservazioni, trovi conferma nella teoria statistica della materia.

Ed infine vale la pena ed è sorprendente osservare come lo studio delle regolarità nello sviluppo degli organismi viventi e i metodi statistici in Fisica siano stati introdotti nella Scienza nello stesso periodo storico. Da due giganti della scienza. Darwin appunto e Ludwig Boltzmann: correva l'anno 1859.

4.2

“tasso differenziale di riproduzione” Che cosa significa questa piuttosto sofisticata espressione?

Il processo descrittivo della scienza si realizza ovviamente con la creazione di modelli tanto più astratti nel loro potere esplicativo quanto più sono lontani dalla percezione. E così avviene che al mondo delle “cose” si sostituisca quello degli “oggetti”, alla percezione delle “cose” la contemplazione di “oggetti” del pensiero.

Consapevole. E così è avvenuto che nel processo di formulazione delle idee fondanti le trame della realtà si sia passati dalla ipotesi dei cinque euclidei poliedri regolari che Platone pone a fondamento di tutte le cose per giungere alla descrizione quantistica del mondo delle “particelle” (elettroni, neutroni, quark,...).

In una moderna visione organica dell’Universo il mondo di ciò che è percepito, diremo il mondo a livello “macroscopico”, deve dunque essere in qualche modo giustificato da ciò che si suppone avvenga a livello “microscopico”; al livello appunto delle “particelle”.

E’ quanto è stato fatto in quel capitolo della fisica, ricordato col nome di termodinamica, dove le leggi sperimentali e **macroscopiche** che intercorrono fra i parametri (temperatura volume, pressione,...) che caratterizzano lo stato di oggetti elementari complessi costituiti da un gran numero di particelle sono pensate come deducibili dalle leggi dinamiche che intercorrono a livello **microscopico** fra gli elementi di cui l’oggetto si pensa sia costituito.

In analogia con quanto avviene nei processi evolutivi in biologia, anche in questo caso, ma in un ambiente molto più sofisticato (il mondo delle particelle) nella impossibilità pratica di riconoscere tutti i parametri dinamici che definiscono l’evolversi del sistema si ricorre per descrivere quell’evoluzione all’uso “epistemico” di metodi probabilistici.

Tutto ciò è ovviamente giustificato dal fatto che anche in questo caso gli oggetti di cui ci si occupa sono costituiti da un numero altissimo di individui: parlando di molecole è del tutto ragionevole dire che ci si aggira su numeri il cui ordine di grandezza è quello del numero di Avogadro (10^{24}).

Ed ecco ora proporsi uno splendido esempio di come il pensiero scientifico vada articolandosi, elaborando idee via via più complesse capaci di dominare ampi settori della realtà, a partire da pressoché banali idee iniziali.

Si comincia assegnando un significato dipendente dalla semantica del viver quotidiano alle parole che nel corso di una successione di proposizioni si vorranno usare.

Pertanto tralasciando le leggi che governano le interazioni fra particelle, si inizia col supporre come dato di partenza l’esistenza di un Universo fatto di **punti** fra loro isolati. Dunque “punti” anziché “cose”.

Si conviene poi di chiamare **“sistema”** ogni **“insieme”** di punti di questo universo di punti (dunque ogni parte della totalità dei punti dell’Universo) Se così si fa i “sistemi” saranno gli “oggetti” di cui ci si occupa in questo universo microscopico (da questo orizzonte vengono dunque escluse le cose, ad es., di questa camera - il tavolo, la sedia - così come cose del tipo stella, atomo o galassia).

Si diranno **qualità dinamiche** dei punti di un sistema l'insieme delle loro **coordinate** e delle loro **velocità**; si suppone che in un assegnato istante queste qualità siano definibili.

Si dirà **stato** di un sistema ad un dato istante l'insieme delle sue qualità dinamiche.

Saranno poi dette **condizioni al contorno** del sistema l'insieme delle grandezze **macroscopiche** proprie della cosa (ad es. volume, pressione, temperatura dell'aria contenuta in una stanza) di cui "l'oggetto sistema" si ritiene un **modello**.

Si suppone infine che **assegnate** le condizioni al contorno di un modello resti definito almeno un **insieme** di distinte distribuzioni delle coordinate e associate velocità dei punti del modello; ogni tale insieme si dirà uno **stato accessibile relativo a quelle condizioni al contorno**.

E' possibile che i punti del sistema, in ognuno dei suoi stati accessibili, interagiscano fra loro e che pertanto abbia un senso parlare della loro **energia interna**.

Supponiamo allora che sia possibile **classificare** gli stati accessibili secondo una scala che accolga in ognuno dei suoi gradini queglii stati accessibili che hanno una **identica** energia interna. Si diranno: **stati accessibili associati ad una assegnata energia interna**.

Uno stato accessibile è dunque associato ad una definita energia interna. Se con $\square E$ designiamo la differenza di energia che separa un gradino della scala dal successivo, allora allorché diremo che un sistema si trova in uno stato E di energia vorremo intendere che la sua energia è compresa fra i valori E e $E + \square E$.

Qui finisce la lunga sfilza delle precisazioni di senso. Non appaia ozioso invitare a prendere atto dello stile proprio del linguaggio scientifico: l'immaginazione è espunta dal **discorso, nulla deve essere lasciato indeterminato**.

E' ovvio, ma vale la pena di dirlo: l'immaginazione, la libertà e la gioia della costruzione scientifica sono il sale del ricercatore, ma la verità della sua intuizione non deve essere travisata dalla fumosità del linguaggio.

La parola "tasso" è di uso comune allorché ci si riferisca alle variazioni nel valore di una grandezza. Così, ad es. se ieri le zucchine costavano (in Euro) 2,15 al Kg. ed oggi costano 2,70 la variazione nel prezzo al kg. vale 0,55 ed il tasso di variazione (che è quello che conta perché segnala la variazione per unità di "cosa") è dato da $0,55/2,15 = 0,25 = 25\%$ (Un aumento notevole: se ieri fossero costate 100 oggi costerebbero 125!).

E' ovviamente indifferente parlare del numero \square degli stati accessibili ad un definito livello di energia interna oppure del "prezzo" di un genere di verdura.

Allora, così come per le zucchine può variare da uno all'altro giorno il prezzo al kg. così può avvenire che, al passare da uno al successivo gradino della scala dell'energia in cui sono classificati gli stati accessibili, vari il numero \square di queglii stati. Conveniamo di designare con $\square\square$ tale variazione, e di designare con $\square\square\square\square$ la variazione valutata quando si passa da un gradino al successivo.

E' grande o piccola quella variazione? Come per le zucchine tutto dipende dal livello da cui si è partiti. Il "tasso" si introduce appunto per mettere in luce questa dipendenza: la variazione unitaria.

Si calcola così:

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\Delta\Omega}{\Delta E}$$

esattamente come si fa per la zucchine.

Dunque $\frac{1}{\Omega} \frac{\Delta\Omega}{\Delta E}$ è il **tasso percentuale di variazione del numero di stati accessibili ad un assegnato sistema nel passare da un livello di energia al successivo.**

Un **numero** importante: lo designeremo con " \square "

Vediamo il suo uso nel caso di due concetti **macroscopici** importanti: quello di **temperatura assoluta** e quello di **entropia**. Temperatura assoluta ed entropia sono concetti macroscopici: grandezze definibili operativamente: si usa anche dire che sono parametri capaci di definire le condizioni al contorno di un "oggetto"

Cominciamo con "temperatura" e a tal fine ritorniamo al mercato delle zucchine.

Se il tasso di incremento giornaliero del loro prezzo va alle stelle, ovviamente il mercato delle zucchine tende allo "zero". Allora, e in analogia, se il tasso " \square " di incremento del numero degli stati accessibili nel passare da un gradino di energia al successivo, è molto grande diventa sempre più difficile, al limite impossibile il passare da un gradino al successivo.

In altre parole, cessa ogni variazione nel tempo della energia interna degli stati accessibili di un sistema. Ma le variazioni di energia assumono a livello macroscopico il nome di "forza".

E allora, ecco una non banale deduzione che consegue da un insieme molto banale di definizioni: se $\square \square \square \square$ "tende all'infinito" ogni forza interna al sistema svanisce.

E' ragionevole assumere $\square \square$ come misura di questo stato di cose? Così pensano i fisici. Se $\square \square$ diviene troppo grande svanisce ogni possibile manifestazione di forze fra i punti del sistema. Al rovescio: Lo stato del sistema si trova in una condizione di forte interazione fra i suoi punti quanto più piccolo è il valore di $\square \square$

Si conviene (in termodinamica) di dire **temperatura assoluta** di un sistema il numero che esprime la condizione di interazione di cui poco sopra si è detto.

Chi ama i simboli ricorderà tutto scrivendo che

$$k T = \square \square \square$$

per chi non li ama: la temperatura assoluta di un sistema è la misura, in unità della grandezza k , di una grandezza inversamente proporzionale al **tasso percentuale di variazione del numero di stati accessibili ad un assegnato sistema nel passare da un livello di energia al successivo.**

Dunque "T" è una misura, dunque un **numero**. Allora Tk dice quante volte si deve prendere la grandezza "k" per avere la misura della grandezza \square^{-1} . E poiché la grandezza k valuta un valore di energia si deduce che anche \square^{-1} valuta lo stesso valore.

Per chi ha fede nelle cose: la costante "k" (detta costante di Boltzmann) è stata scelta in modo tale che ogni buon termometro tarato in gradi centigradi (quelli che misurano la "febbre") dovrebbe segnare -273,26 se T segna "zero".
Ovviamente: "zero assoluto".

E così avviene che anche per il **numero T** si parli di gradi (ancora ovviamente assoluti). Se pertanto si dice che la temperatura di un contenitore è di 5 gradi (un freddo boia) si intende dire che lo stato termico di quel contenitore è rappresentato da un valore di energia (l'energia interna delle particelle interne al contenitore) di $5k$

Veniamo al concetto macroscopico di "**entropia**"

"L'evoluzione nella biosfera è dunque un processo necessariamente irreversibile che definisce una direzione nel tempo, direzione che è identica a quella imposta dall'aumento dell'**entropia**, cioè dal secondo principio della termodinamica. Il secondo principio si basa su considerazioni statistiche pari a quelle che stabiliscono l'irreversibilità della evoluzione: **è legittimo considerare quest'ultima come una sua espressione nella biosfera.**"

Così Monod nel testo riportato (v. 7.)

Si affollano alla mente molte immagini, un susseguirsi di concetti e delle parole che li esprimono: equilibrio, stabile instabile, reversibile irreversibile, probabile improbabile, ordine disordine, divenire, un verso nel divenire, ...tempo.

Ecco, ... il tempo. Ilya Prigogine sembra ossessionato da questo inafferrabile concetto e dedica un suo libro (v. Ilya Prigogine *La fine delle certezze; il tempo, il caos, e le leggi della natura*:1997, Torino) alla ricerca della sua esplicitazione nell'ambito della descrizione fisica del mondo.

Il tempo. Appunto un concetto inafferrabile.

Edoardo Boncinelli (Edoardo Boncinelli: *Fatti di tempo: in Figli di Kronos* a cura di Carlo Maria Martini; Milano, 2001) dice che il tempo racchiude la sfida maggiore alla comprensione umana: esiste qualche cosa che fluisce ? (così come amava dire Newton) Ma come fluisce?

Così come alcuni fenomeni naturali sembrano denunciare: un fluire ciclico di cui abbiamo consapevolezza dall'alternanza del giorno e della notte, dall'avvicinarsi delle stagioni? O invece un fluire lineare del trascorrere delle ore e dei giorni la cui consapevolezza traiamo dalla constatazione che gli esseri viventi, e noi stessi, **invecchiano e muoiono** in un irresistibile succedersi di eventi? E' proprio quando ci riferiamo ad un passato che è stato e non è più, a un futuro che forse sarà ma non è ancora, che facciamo esperienza della **irreversibilità** del tempo. Quando parliamo di tempo psicologico a questa irreversibilità del tempo facciamo riferimento. Un tempo psicologico che ciascuno di noi avverte nel suo fluire, nella esistenza di sensazioni personali simultanee, ovvero **successive, o ancora nella esperienza del ritmo di una sequenza di sensazioni.**

Siamo tutti consapevoli delle difficoltà che si incontrano allorché su questi temi si passi dal **sentimento** di ciò che si intuisce alla espressione linguistica del suo "senso". Tutti in proposito ricordiamo le acute osservazioni di Agostino:

Che cosa è il tempo? Chi ce ne darà una definizione breve e facile? Chi riuscirà ad afferrarlo almeno col pensiero tanto da poterne parlare? Eppure che cosa c'è che noi,

quando parliamo, diamo per tanto scontato e familiare quanto il tempo? E senza dubbio capiamo quello che diciamo, anche quando ne sentiamo parlare da un altro. Che cosa è dunque il tempo? Se nessuno me lo chiede, lo so; se voglio spiegarlo a chi me lo chiede, non lo so più. E tuttavia io affermo tranquillamente di sapere che se nulla passasse non ci sarebbe un passato, e se nulla avvenisse non ci sarebbe un avvenire, e se nulla esistesse non ci sarebbe un presente. Ma allora in che senso esistono questi tempi, il passato e il futuro, se il passato non è più e il futuro non è ancora? Quanto al presente, se fosse sempre presente e non trascorresse nel passato, non sarebbe tempo ma eternità. Se dunque il presente, per far parte del tempo, in tanto esiste in quanto trascorre nel passato, in che senso diciamo che esiste anch'esso? Se appunto la sola ragione di essere è che non esisterà: in fondo è vero, come noi affermiamo, che il tempo c'è solo in quanto tende a non essere.

E' dunque ben giustificata l'enfasi con cui Carlo Sini (Carlo Sini: *Può la filosofia vincere il tempo?* in Figli di Kronos pag. 69) si oppone alle "certezze" dei fisici. Secondo Sini a Platone (Platone, *Timeo*) è dovuto il testo capitale a partire dal quale la nostra intera cultura ripete la sua nozione, la sua idea e la sua immagine del tempo:

Poiché il padre, che l'aveva generato, vide muoversi e vivere questo mondo divenuto immagine degli eterni dei, se ne compiacque e pieno di letizia pensò di farlo ancor più simigliante al suo modello. Come dunque questo è un animale eterno, così anche l'universo egli cercò, secondo il suo potere, di renderlo tale. Ora, la natura dell'anima era eterna, ma questa proprietà non era possibile conferirla pienamente a chi fosse stato generato; e perciò pensa di creare una immagine mobile dell'eternità, e ordinando il cielo, crea dell'eternità che rimane nell'unità un'immagine eterna che procede secondo il numero, quella che abbiamo chiamato tempo. E i giorni e le notti e i mesi e gli anni, che non erano prima che il cielo nascesse, fece allora in modo che anch'essi potessero nascere, mentre creava quello. Tutte queste sono parti di tempo, e l'era ed il sarà sono forme generate di tempo, che noi inconsapevolmente riferiamo a torto all'essenza divina. Invero noi diciamo che essa era e che è e che sarà, e tuttavia solo l'è le conviene veramente.

Carlo Sini non è un ingenuo:

« [Comprendiamo] le ragioni di Platone nel porre in bocca a Timeo il racconto della nascita dell'Universo. [Scorgiamo] il movimento "regressivo-fondativo" del suo pensiero: dal tempo profano ed oscuro della Terra e degli uomini al tempo leggendario degli eroi, per risalire infine alla luminosa e compiuta perfezione dei cieli, immagine mobile dell'eternità, donde deriva ogni cosa creata, il suo tempo e il suo destino. ...

Quale [che] sia il senso che la visione copernicana inaugura è ancora problema per noi, che scandagliamo i cieli, li fotografiamo e li ascoltiamo, in cerca di eventuali altre intelligenze: in realtà, di quella intelligenza, appunto, che Platone vi pose nel *Timeo*».

E Sini conclude: «non è per nulla, nelle intenzioni stesse di Platone, una descrizione senz'altro **attendibile ed evidente** di "come stanno le cose"».

L'Universo, il tempo, una cosa fra le cose?

Ma i fisici non esibiscono certezze. La loro "epistemé" è molto più modesta.

La fisica è interessata ai processi naturali solo per quel che essi presentano di riproducibile e di regolare. «La fisica non descrive la natura. La fisica descrive regolarità tra eventi e **solo** regolarità tra eventi» (Eugene Wigner).

Lo stato di un sistema isolato a livello **macroscopico** viene caratterizzato da alcuni parametri come temperatura, pressione, volume,...: essi sono strettamente legati alla nostra percezione. Non è così per l'**entropia**, anche questo un **parametro di stato**.

La parola è stata coniata da Rudolf Clausius (1865): «Se si cerca per l'entropia un nome che ne ricordi il significato, si potrebbe pensare a quanto si dice della grandezza "energia interna", [della quale] si dice che rappresenta il contenuto termico e di lavoro di un corpo, e in modo analogo dire che l'entropia rappresenta il contenuto di trasformazione [dello stato] del corpo. Poiché ritengo preferibile trarre i nomi di tali grandezze, tanto importanti per la scienza, dalle lingue antiche, così che possano venir impiegati senza variazioni in tutte le lingue moderne, [ho proposto il nome entropia] dalla parola greca *tropé*, trasformazione».

Il concetto di entropia è strettamente legato a quello di temperatura. La temperatura misura una **intensità**, l'intensità di una energia. Il suo valore è **inversamente** proporzionale al tasso di variazione del numero degli stati accessibili nel passare da uno stato di energia interna al successivo: se il tasso di variazione è molto grande la temperatura è molto piccola e piccolo è il suo valore energetico espresso in unità della costante di Boltzmann. Nulla si dice sul numero di questi stati.

L'informazione sullo stato del sistema è dunque incompleta. La grandezza "entropia" è stata introdotta al fine di completare questa lacuna: essa infatti esprime la distribuzione dell'energia fra gli stati accessibili nei diversi gradini della stessa: quanti stati accessibili in questo, quanti in quello, ...

L'entropia è dunque una funzione della energia interna e la sua conoscenza è un necessario complemento, di natura estensionale, alla **informazione** che si ha sullo stato del sistema.

Come definire questa funzione? Non certo con un conto delle particelle!

Ecco un magnifico esempio della conquista **razionale** di un concetto complesso a partire da considerazioni del tutto banali a livello percettivo.

Una sequenza di definizioni e di ipotesi da cui dedurre in un numero finito di passi un insieme di proposizioni capaci di definire senza ambiguità linguistiche il concetto voluto.

Le 28 proposizioni che seguono definiscono in modo sufficientemente completo il concetto di entropia (per chiarezza espositiva e per meglio mettere in rilievo l'aspetto logico della deduzione vengono riproposti alcuni concetti già precedentemente introdotti):

- 1) Diremo "punto materiale" (brevemente "punto") ogni "oggetto" capace di soddisfare le leggi della dinamica newtoniana.
- 2) Si suppone che i punti appartengano allo spazio della geometria euclidea.
- 3) Diremo "sistema" ovvero "**microstato**" ogni insieme di punti.
- 4) Diremo "**macrostato**" di un "microstato" (sistema) ogni manifestazione a livello percettivo del microstato. (Ogni macrostato presuppone dunque un soggiacente microstato).
- 5) Diremo "**condizioni al contorno**" del microstato ogni insieme di "informazioni" sul "macrostato".
- 6) Diremo "**distribuzione**" di un sistema ogni descrizione delle posizioni e velocità dei suoi punti.
- 7) Se avviene che una distribuzione varia nel tempo si dirà che i suoi punti hanno interagito.
- 8) Se avviene che in corrispondenza di una definita distribuzione i punti di un sistema

interagiscono, allora si dirà che il sistema possiede “**energia interna**”.

- 9) Si dirà “**stato accessibile**” di un sistema per una definita energia interna una distribuzione (v.6) compatibile con le condizioni al contorno (v.5) del macrostato.
- 10) Si suppone che per un assegnato macrostato esistano molti stati accessibili alla corrispondente energia interna del microstato (v.3, 4)).
- 11) Si dirà che un sistema è in **equilibrio** se si trova con identica probabilità in ogni suo stato accessibile (v.9)) associato ad una assegnata energia interna (v.8)).
- 12) Un sistema si dirà **isolato** se e solo se i suoi punti non interagiscono spontaneamente con i punti di altri sistemi.
- 13) Assegnato un sistema A esiste in ogni caso un sistema A' tale che il sistema costituito dalla unione dei due sia isolato (v.12)). Lo designeremo con A* (Per male che vada si può supporre che A* sia l'Universo U; sarà isolato? Mah!).
- 14) Sia E un livello di energia di A, E' quello di A'; il livello di energia di A* vale E+E'; designiamo E+E' con E*, e poiché A* è isolato vale che E* è costante.
- 15) Si suppone che fra A ed A' avvengano scambi di energia (alcune particelle passano da A ad A' e viceversa) fino a quando non sia raggiunto un **equilibrio dinamico** (tante ne passano da una parte verso l'altra quante nel viceversa).
- 16) Nelle condizioni di equilibrio dinamico molti e distinti possono essere gli stati rispettivamente accessibili ad A ed A' (le particelle passano di qui e di là e dunque variano le distribuzioni). Quale è la probabilità P(E) che raggiunto l'equilibrio A si trovi in uno stato di energia E?
- 17) Sia Ω^* il numero di tutti i possibili stati accessibili ad A* nelle date condizioni al contorno e in condizioni di equilibrio.
- 18) Si conviene che nella raggiunta condizione di equilibrio tutti gli stati accessibili di A* siano egualmente possibili per cui la probabilità che A* si trovi in uno di essi vale $1/\Omega^*$.
- 19) Sia $\Omega^*(E)$ il numero degli stati accessibili, nelle condizioni di equilibrio, ad A* nel caso in cui il sottosistema A si trovi nello stato di energia E. Essi comprendono gli stati accessibili ad A, e dunque associati alla energia E, e gli stati accessibili ad A' che saranno associati ad una generica energia E'. In questa situazione designeremo A* con A*(E).
- 20) Ognuno di questi stati è uno stato di accessibile ad A* nella su condizione di equilibrio e dunque hanno tutti eguale probabilità di accadere (v.18)).
- 21) Ognuno di essi ha pertanto probabilità $1/\Omega^*$ di accadere e dunque la probabilità che il sottostato A si trovi nello stato di energia E è eguale a $1/\Omega^*$ contato tante volte quanto è il numero degli stati accessibili ad A* per cui A si trova nello stato di energia E.
- 22) Ma tale numero è $\Omega^*(E)$ (v. 19)).
- 23) Dunque la probabilità che il sottosistema A si trovi nello stato di energia E è $\Omega^*(E) \times 1/\Omega^*$. In simboli $P(E) = \Omega^*(E) \times 1/\Omega^*$.
- 24) Ma in assegnate condizioni al contorno Ω^* è un numero costante. Dunque $P(E) = C \Omega^*(E)$. Quanto vale $\Omega^*(E)$?
- 25) Il numero degli stati accessibili, nelle condizioni di equilibrio, ad A* nel caso in cui il sottosistema A si trovi nello stato di energia E, comprendono gli stati accessibili ad A, e dunque associati alla energia E, e gli stati accessibili ad A' che saranno associati ad una generica energia E' (v.19)).
- 26) Pertanto per ognuno degli stati accessibili di A e di energia E può esistere in A* uno stato accessibile ad A' di energia E'=E*-E Si indichi con $\Omega(E)$ si il numero degli stati di A di energia E e con $\Omega'(E')$ quelli di A'.
- 27) Per ognuno degli stati di A(E) possono pertanto esistere $\Omega'(E')$ stati di A',

- 28) e poiché il numero degli stati di $A(E)$ è $\Omega(E)$, il numero degli stati $\Omega^*(E)$ vale $\Omega(E) \times \Omega'(E')$ (v. 25) - (27))
 E' opportuno riassumere in simboli questo risultato
 (*) $P(E) = C \Omega(E) \times \Omega'(E')$
 dove la lettera "C" il numero $1/\Omega^*_{\text{totale}}$

Fermiamoci qui nella presentazione dell'elenco delle proposizioni definitorie. Può bastare.

Nello statuto dei modelli attuali di conoscenza la definizione della misura di ogni grandezza capace di valutare una qualità di un oggetto A deve salvaguardare la struttura additiva della misura.

(Questo ad es. significa che il prezzo che si paga per l'acquisto di una assegnata quantità di zucchine raddoppia se raddoppio la quantità acquistata).

Non è così nel caso del numero (una misura!) $\Omega^*(E)$: misura di una probabilità.
 E infatti. Se $A^*=A$ allora $\Omega^*(E)=\Omega(E)$; ma se (come spesso accade) $A^*=A+A'$ allora $\Omega^*(E)=\Omega(E)\times\Omega'(E')$. (v. 28))

Non va bene: in luogo del "x" dovrebbe stare il "+".

L'"escamotage" per passare dall'uso dell'uno a quello dell'altro segno risale al secolo XVII (1614, John Napier pubblica *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*) Gli astronomi del tempo (Ad es. Tycho Brahe, esperto nell'uso delle formule di Werner capaci di sostituire operazioni di moltiplicazione con addizioni e derivanti dalle formule "goniometriche" di "prostaferesi" - parola di etimo greco che appunto significa addizione e sottrazione) dovendo operare con numeri molto grandi (astronomici) pensarono di trasformare quei numeri in forma di potenze e di operare poi sugli esponenti. Ad es. così

$$\begin{aligned} & 273 \times 1465 \\ \Rightarrow & 10^{2,436} \times 10^{3,165} \quad (\text{Si legga : è con buona approssimazione eguale a ...}) \\ \Rightarrow & 10^{2,436+3,165} \\ \Rightarrow & 10^{5,601} \\ \Rightarrow & 399024 \end{aligned}$$

La calcolatrice mi fornisce 399945 (che è il valore esatto; l'errore relativo vale $(399945-3999024) / 399945 = 0,002$. Buono)

Il calcolo con gli esponenti venne detto "logaritmico" (dal "logos" (ragione) e "arimos" (numero): la ragione (esponente) del numero. Dunque "logaritmo" come "esponente").

Ed allora in luogo di calcolare ad es. 273×1465 si calcola la somma dei loro esponenti (si suole usare la base 10); si scrive: $\log 273 + \log 1475 \dots$

(Usare una piccola calcolatrice; essa fornisce che (il segno \approx significa: all'incirca eguale a...))

$$\log 273 \approx 2,436, \quad \log 1475 \approx 3,165 \quad \text{e cioè che} \\ 273 \approx 10^{2,436}, \quad 1475 \approx 10^{3,165}$$

e dunque che

$$273 \times 1475 \approx 10^{2,436} \times 10^{3,165} = 10^{5,602} \approx 399024$$

Può bastare per capire che alla informazione costituita da $\Omega(E)$ si sostituisca il numero $\log \Omega(E)$

Dunque il **numero** " $\log \Omega(E)$ " esprime una **informazione** sullo stato del sistema A e più in generale di un sistema.

La **grandezza** proporzionale a questa informazione

$$k \log \Omega(E) \quad (k: \text{costante di Boltzmann})$$

e ora misurata essa stessa in valori energetici viene detta **entropia**. L'uso vuole che l'entropia, di un generico sistema macroscopico sia designata con S , e dunque valga:

$$S = k \log \Omega$$

dove con Ω si designa il numero degli stati accessibili ad un sistema A nello stato di energia E .

L'entropia è una **grandezza**. La sua **misura** ($\log \Omega$) esprime una **misura logaritmica** del numero degli stati accessibili al sistema; a ciascuno di essi viene attribuito un contenuto k in energia. Esattamente come si è fatto per la temperatura assoluta k è ancora la costante di Boltzmann.

Così se si dice che $3k$ è lo stato di entropia di A si intende dire che in quello stato S vale $3k$ e dunque che il numero degli stati accessibili è all'incirca dato da $e^3 \approx 20$. (Per ragioni tecniche molto banali si usa come base dei logaritmi il numero $e \approx 2,71828\dots$, la cui origine storica proprio banale non è) Attenzione: 20 è il numero degli stati accessibili; l'entropia del sistema è misurata in unità k ed è dunque proporzionale a $20k$.

Si è detto che vale l'eguaglianza

$$(*) \quad P(E) = C \Omega(E) \times \Omega'(E') = C \Omega^*(E);$$

essa esprime la probabilità che il sistema A si trovi in uno stato di energia E .

Sia designata da $S^* = k \log \Omega^*(E)$ l'entropia del sistema isolato $A^*(E)$ cui A appartiene valutata nel caso in cui il sistema A si trovi nello stato di energia E .

Ne segue:

- Poiché $P(E) = C \Omega(E)$ esprime la probabilità che il sistema A si trovi in uno stato di energia E .
- Poiché, ovviamente, A tende a raggiungere il suo stato di energia interna, di massima probabilità compatibile con i vincoli del sistema,
- poiché per tale valore sarà massimo il valore di $\Omega^*(E)$,
- poiché con $\Omega^*(E)$ si designa il numero degli stati accessibili ad un sistema A nello stato di energia E e vale che $\Omega^*(E) = \Omega(E) \times \Omega'(E')$,
- resta provato che A^* tende, con A , a distribuire le sue descrizioni nel maggior numero di stati accessibili, il che è come dire nel senso del **massimo disordine**.

Si è detto che per ogni sistema A parte di un sistema isolato A^* esiste un sistema A' tale che A^* sia l'unione di A con A' . Si dirà che A , A' sono in **contatto termico**.

Siano dunque A , A' due sistemi in contatto termico nei rispettivi stati di energia E, E' . Supponiamo che E, E' siano fra loro distinti. Poiché A , A' formano un unico sistema (che supponiamo **isolato**) A^* le particelle di A interagiscono con quelle di A' e pertanto variano le rispettive energie interne.

Varierà pertanto il numero degli stati accessibili, ad es., di A . Il processo continuerà fino a che il numero degli stati accessibili sia quello che corrisponde alla distribuzione più probabile dei punti di A con quelli di A' . Si dirà che in tal caso si è raggiunto uno stato di **equilibrio interno dinamico**. Si è visto che ciò avviene allorché il numero degli stati accessibili ad $A^*(E)$ raggiunge il suo valore massimo.

Supponiamo che A , A' siano in equilibrio dinamico, dunque che tanti punti passino da A verso A' quanti in senso inverso. E' come dire che i tassi di transizione nei due sensi sono

identici. Ma si è detto che le temperature assolute sono parametri macroscopici inversamente proporzionali ai tassi di transizione. Dobbiamo dunque concludere che **all'equilibrio gli stati A, A' hanno raggiunto una identica temperatura assoluta.**

Non è un risultato da poco. Con esso si ritrova la proposizione che nella formulazione di Clausius (1822-1888) così veniva espressa "Non è possibile trasferire calore spontaneamente da un corpo freddo ad uno caldo". Essa era stata assunta, appunto da Clausius, come il principio fondante la termodinamica (dinamica degli scambi di calore fra sistemi macroscopici).

Questo quanto alle temperature. Ma ancora altro si può dire.

Ora infatti si sa che se si assume di assegnare un arbitrario e definito valore alla entropia di un sistema **isolato** in un definito sistema di energia, allora, se avvengono variazioni nella energia interna dei componenti dello stesso l'entropia del sistema deve crescere (Si rivedano i punti 2, 3 ed inoltre si osservi che

- Poiché $S^* = k \log \Omega^*(E)$ esprime l'entropia del sistema isolato $A^*(E)$, cui A appartiene, valutata nel caso in cui il sistema A si trovi nello stato di energia E,
- se A si trova in uno stato di energia di massima probabilità è come dire che l'entropia S^* del sistema isolato $A^*(E)$ associato allo stato di massima probabilità di A è anch'essa massima).

Ma allora note, a livello macroscopico, le entropie di due stati di energia di uno stesso sistema che in qualche modo possa ritenersi **isolato** si riconosce immediatamente il verso in cui si muove il sistema: lo abbiamo detto, dallo stato di entropia minore a quello di entropia maggiore.

Si dice che l'entropia segna una freccia nel tempo. La meccanica classica prevedeva nello spazio e nel tempo assoluto il moto di un punto di cui fossero note le condizioni iniziali; i concetti di sistema, di stato accessibile, di temperatura, di entropia, sono in grado di guidarci nello studio di sistemi complessi quali sono i sistemi molecolari.

Questa è la necessità di cui parla Monod.

Ma come è possibile trasferire a livello macroscopico concetti che sono stati definiti in piccolo ed a livello microscopico?

Si designi col nome di **variazione della misura di entropia** di un sistema nel livello di energia interna E al variare della stessa, il prodotto della variazione di energia del sistema per la **variazione percentuale del numero Ω degli stati accessibili** al sistema a quel livello di energia.

E' opportuno tradurre in simboli la precedente definizione:

ΔS => variazione di entropia (una grandezza valutata in unità di misura "k")

ΔE => variazione di energia del sistema

$\frac{1}{\Omega} \frac{\Delta \Omega}{\Delta E}$ => **variazione percentuale del numero Ω degli stati accessibili** al

sistema al livello energia E (lo avevamo chiamato "tasso" di incremento degli stati accessibili per successivi gradini ΔE di energia e lo avevamo designato con Ω)

E dunque

$$S = k \left(N \times \frac{1}{\Omega} \ln \frac{\Omega}{\Delta E} \right)$$

Il problema è, a livello tecnico, del tutto semplice: bastano quattro conti in croce. Per chi non ha allergie per i simboli (gli altri si accontentino di credere):

$$S = k \ln \left(\frac{\Omega}{\Delta E} \right) = 1/k \times (kS)$$

2. $kT = 1/k$
3. $S = k \ln \Omega$
4. $k = 1/T$

Dunque la variazione di entropia ΔS vale $\Delta E/T$.

E' con Joule (James Prescott Joule -1818, 1889) che le parole "energia" e "calore" sono divenuti sinonimi. ("Principio di equivalenza": 1843 a seguito di 25 anni di accurate ricerche)

Ora tutti sanno che ΔE si valuta con un "calorimetro" e "T" con un termometro; oggetti da supermercato.

Se con ΔQ si valuta la variazione di energia valutata con un calorimetro, su tutti i manuali si legge la seguente definizione macroscopica di variazione di entropia

$$\Delta S = k \ln \left(\frac{\Omega}{\Delta E} \right) = \Delta Q/T$$

B. IL RUOLO NON EPISTEMICO DELLA PROBABILITA'

Questa sezione è divisa in due parti: "Un battito d'ali di farfalla", "Le coste della Bretagna". Nella prima si descrive il carattere non epistemico del concetto di probabilità nel caso dei moti caotici; si prova la necessità di sostituire in tali casi il concetto di traiettoria con quello di "procedura di probabilità".

Nella seconda il concetto di traiettoria viene posto in discussione dal punto di vista della geometria "frattale" di Mandelbrot.

In entrambi i casi il concetto di probabilità cessa di apparire come un espediente tecnico capace di sopperire alle nostre limitate capacità conoscitive (l'epistémé) per divenire il sostituto necessario del concetto di "necessità": la fisica si approssima ad essere la scienza del possibile e non quella del necessario.

Un battito d'ali di farfalla

5. «Una mutazione semplice, puntiforme, quale la sostituzione nel DNA di una lettera del codice a un'altra, è reversibile. La teoria lo prevede, l'esperienza lo conferma. Ma qualsiasi evoluzione sensibile è il risultato di un gran numero di mutazioni indipendenti, accumulate successivamente nella specie originale. **A causa del numero di avvenimenti indipendenti di cui costituisce il risultato, un simile fenomeno è statisticamente irreversibile.**»

5.1

Fra i fisici (non so se anche fra i meteorologi che erano i più diretti interessati) ha avuto un certo successo la frase “un battito d’ali d’una farfalla a Rio, può determinare un tornado in Florida”?

Un tornado, dunque un avvenimento per sua natura caotico e che tuttavia costituisce un unico oggetto. Come descrivere oggetti in se stessi caotici e che tuttavia possono essere pensati come una unità? (In fin dei conti un tornado si sposta esattamente come una mongolfiera!)

In questo contesto gioca ancora un ruolo il concetto matematico di probabilità ove tuttavia si abbia l’accortezza di usarlo in termini NON epistemici.

Vediamo di che si tratta

La natura presenta sia processi reversibili che processi irreversibili, ma i primi sono l’eccezione i secondi la regola .

La distinzione tra processi reversibili ed irreversibili è stata da Rudolf Clausius (1865) ricondotta al concetto di entropia: lo abbiamo visto «L’energia dell’universo è costante.

L’entropia dell’universo cresce verso un massimo»

La crescita dell’entropia designa la direzione del tempo: i sistemi evolvono nel verso del massimo numero di stati accessibili e dunque verso gli stati più probabili

Ma l’entropia non ha alcun ruolo nelle leggi della fisica Newtoniana, simmetriche rispetto alla evoluzione temporale, mentre per i fenomeni irreversibili si rende necessaria una distinzione nel verso del tempo.

E allora è forse insensato ritenere che il secondo principio della termodinamica, e quindi la freccia del tempo, dipenderebbero dalla nostra ignoranza, dal carattere grossolano delle nostre descrizioni; forse è insensato ritenere che ad un osservatore ben informato (il diavolo di Laplace? vedi in fine del punto 2) capace di osservare i microstati, il mondo apparirebbe perfettamente simmetrico nel tempo; ed infine che noi non saremmo figli del gioco della casualità.

Forse è insensato ritenere che, a livello Newtoniano, tutto sia dato.

Le newtoniane leggi della fisica classica sono reversibili rispetto al tempo: esse non solo consentono di prevedere come andranno le cose, ma sono capaci di dire come le cose sono andate nei tempi passati.

Ma allora se la freccia del tempo trova la sua giustificazione nell’evolversi **irreversibile** dei sistemi isolati verso gli stati di massima entropia, una descrizione di queste strutture (irreversibili) è impossibile introducendo approssimazioni in leggi **reversibili** rispetto al tempo.

Se così è allora va dunque riconosciuto che **l’instabilità ed il caos propongono limiti ai concetti fondamentali della fisica classica. Si impone la necessità di formulare diversamente le sue leggi.**

La differenza fra sistemi stabili ed instabili è familiare; essa si può descrivere dicendo che sono detti stabili quei sistemi in cui piccole modificazioni delle condizioni iniziali producono effetti reversibili, mentre per i sistemi instabili quelle modificazioni si amplificano nel corso del tempo.

Un notevole esempio di sistemi instabili è dato dai **sistemi caotici** dove condizioni iniziali fra loro prossime quanto si vuole danno luogo a situazioni successive che, nel corso del tempo, divergono in modo esponenziale (effetto farfalla).

L'instabilità distrugge ogni tipo (deterministico) di rappresentazione: poiché minimi cambiamenti nelle condizioni iniziali vengono amplificati, una singola traiettoria nello spazio non sarà sufficiente a descrivere adeguatamente l'andamento di "sistemi" fra loro molto prossimi nelle condizioni iniziali ma che si allontanano sensibilmente nel tempo.

Il punto iniziale, che definisce deterministicamente la traiettoria del sistema, deve essere sostituito da una "**nube di punti**" vicini, definita assegnando probabilisticamente la densità della distribuzione dei punti nell'intorno di ogni singolo punto possibile.

La nozione di traiettoria resta un modo di rappresentazione adeguato di ciò che avviene solo se la traiettoria rimane press'a poco la stessa quando si modificano leggermente le condizioni iniziali. Le descrizioni in termini di traiettorie di sistemi caotici non hanno questo carattere, poiché, lo si è detto, sono sensibili alle condizioni iniziali.

Alla descrizione per traiettorie si contrappone la necessità di proporre una **procedura** che consenta di conoscere la distribuzione **di probabilità**, per ogni valore del tempo, di un **sistema di possibili traiettorie**. Dunque la fisica dei sistemi caotici avrà come oggetti fondamentali, in sostituzione di traiettorie, **sistemi di traiettorie** più o meno probabili.

Una scelta non metafisica ma la conseguenza della necessaria descrizione statistica richiesta dall'esistenza di sistemi dinamici intrinsecamente instabili.

In tal caso la descrizione dell'evoluzione di un sistema sarà "complessa" ed "irriducibile": "complessa" nel senso che essa rompe la simmetria temporale e "irriducibile" nel senso che non si applica a traiettorie.

Le leggi della dinamica dei sistemi caotici assumono un nuovo significato: esse incorporano l'irreversibilità e **non esprimono più certezze bensì possibilità**.

Non ha più senso dire che la descrizione termodinamica dei fenomeni irreversibili è dovuta alla nostra ignoranza delle condizioni iniziali (che dunque il diavolo di Laplace potrebbe superare, onde essenziale resterebbe così la descrizione in termini di traiettorie): l'irreversibilità appartiene ad una descrizione dinamica che assume come suo elemento fondante, **non il termine di traiettoria** ma quello di una **distribuzione probabilistica** delle traiettorie dell'intero sistema.

L'elemento fondante **non** è più di natura "**locale**" (la posizione e la quantità di moto, ad un assegnato istante, di una particella; e poi, la descrizione di come, in quell'istante, in quella posizione e per quella quantità di moto quelle variabili vengano modificate) **ma** di natura "**globale**" (l'assegnazione della probabilità per l'intero sistema, istante dopo istante).

In questa prospettiva il passato viene espunto dal discorso descrittivo. Solo il futuro è possibile e descritto dalla funzione di distribuzione, ma il passato è ignoto. (Certamente ignoto quale fra i tanti possibili cammini abbiano condotto alla attuale osservazione eseguita, globalmente, sul sistema).

Il concetto di funzione di distribuzione delle probabilità associate ad un sistema di traiettorie possibili permette di confutare le interpretazioni antropocentriche, per le quali l'irreversibilità si manifesta a causa della nostra ignoranza, legata alla impossibilità di valutare le condizioni iniziali con precisione infinita, e pertanto al fatto che noi per descrivere un moto dobbiamo introdurre delle approssimazioni .

5.2.

L'**indeterminismo**, che così fa la sua comparsa nella fisica, non dovrebbe venir confuso con l'imprevedibilità che renderebbe illusoria ogni azione umana.

I *Discorsi matematici intorno a due nuove scienze* di **Galileo** sono del 1632, i *"Philosophiae naturalis principia"* di **Newton** sono del 1687. La *Mécanique analytique* (1788) di **Lagrange** conclude un cammino di due secoli in cui sono state poste le fondamenta della contemporanea civiltà delle macchine.

Si racconta che Napoleone, a cui era stato presentato il Lagrange, chiedesse se veramente nel suo trattato non fosse possibile trovare la parola "Dio", e che, a questa domanda, Lagrange abbia risposto dicendo che quella parola esprimeva, in quel contesto, un concetto non necessario.

Questa fede deterministica trovava, e trova tuttora, conforto negli innegabili successi della astronomia e della tecnologia; in qualche misura, anche se la fiducia si è notevolmente attenuata, essa appartiene ancora al mondo della scienza.

E' arduo proporre una concezione che concili necessità e libertà e tuttavia va preso atto che se il determinismo laplaciano rende difficile, se non impossibile, l'incontro con la realtà del tempo e del mutamento va preso atto che ogni funzione di distribuzione non esclude una previsione. Ovviamente solo il controllo sperimentale consentirà di passare dalla previsione probabilistica alla certezza. In questi termini si usa dire che **ogni controllo "collassa"** la funzione di distribuzione.

E' arduo proporre una concezione che concili necessità e libertà.

Da sempre.

Epicuro, sulla scia di Democrito, immaginava che il mondo fosse costituito da atomi in movimento nel vuoto su traiettorie **parallele**: come potevano allora manifestarsi novità tramite nuove combinazioni di atomi? E' arduo conciliare necessità e libertà e può sembrare ingenua la soluzione proposta da Epicuro, il *clinamen*: un avvenimento che in modo imprevedibile altera impercettibilmente le traiettorie parallele degli atomi.

Con Charles Darwin il divenire viene posto al centro della nostra comprensione della natura.

Ma il divenire non conosce la necessità .

Se così è, allora è necessario rinunciare alla descrizione delle **traiettorie** dinamiche individuali (per loro stessa definizione reversibili) e, al contrario, ragionare anche in meccanica in termini di **popolazioni** (nel caso dei sistemi caotici si è parlato di **sistemi**).

Esattamente come per Darwin, lo studio di popolazioni, e non di singoli individui, permetterà di capire come la variabilità individuale, su tempi lunghi (da Rio alla Florida), sottoposta a un processo di selezione, generi una deriva; appunto: il *clinamen*.

Il *clinamen* dunque, che dal punto di vista della meccanica analitica può ora essere descritto nei termini di collisioni in una popolazione di particelle, quelle collisioni che valgono a produrre quella sorta di *deriva* che è descritta dall'aumento della entropia.

Il divenire non conosce la necessità. Una frase ad effetto: pericolosa.

Il punto di vista della intrinseca irreversibilità dei fenomeni naturali può infatti essere fuorviante: non è corretto associare l'irreversibilità solo ad un aumento di disordine.

Può avvenire il contrario: la freccia del tempo può essere una fonte di ordine.

Lontano dall'equilibrio, il ruolo costruttivo della irreversibilità può divenire sorprendente.

Lo sappiamo, e Monod ha descritto come avviene. **La vita è possibile solo in un Universo lontano dall'equilibrio.**

5.3

Dappertutto intorno a noi vediamo *emergere* strutture, che attestano la creatività della natura: in un modo o nell'altro questa creatività deve essere associata a processi irreversibili.

Lontano dall'equilibrio la materia assume nuove proprietà, in cui le **fluttuazioni**, le instabilità assumono un ruolo essenziale.

E' di Galileo l'ipotesi che «Il libro della natura (sia) scritto in lingua matematica, e i caratteri (siano) triangoli, cerchi ed altre figure geometriche».

Ma avviene che nel mondo della nostra esperienza quotidiana le figure geometriche (euclidee) siano piuttosto l'eccezione: quale è la forma di un sasso? di una nuvola? di una montagna? Regolarità ed armonia sembrano necessari agli oggetti di studio scientifico; ma l'universo della nostra esperienza appare frantumato, aleatorio, lontano dall'universo compassato della geometria classica. E' veramente un universo compassato e armonico questo universo della matematica classica, certamente soddisfacente dal punto di vista estetico ma "incompleto" nella sua capacità di descrizione del reale.

Si pongono allora due problemi: da un lato come dare maggiore libertà alla intuizione, liberata dagli impacci formali, nella realizzazione di adeguati strumenti di descrizione del mondo delle cose, dall'altro come descrivere in un linguaggio appropriato e coerente questo "mondo reale", così irregolare ed aleatorio.

Nella prefazione al suo saggio, apparso in Francia nel 1975 con il titolo *Les objects fractals* (Flammarion, Paris) e poi stampato in Italia nel 1987 (Einaudi, Torino) Benoit B. Mandelbrot scrive «Nel suo sforzo per descrivere il mondo la scienza procede per serie di immagini o modelli sempre più realistici. I più semplici sono dei *continua* perfettamente omogenei, come un filo o un cosmo di densità uniforme, o un fluido di temperatura, densità, pressione e velocità uniformi. La fisica ha avuto successo perché è riuscita ad individuare domini in cui immagini del genere sono estremamente utili; ma esistono domini di realtà così irregolari, che il modello continuo perfettamente omogeneo perde ogni efficacia e non può servire nemmeno come prima approssimazione. Verso il 1920 Norbert Wiener introdusse nella scienza, per descrivere queste situazioni di estremo disordine, il termine "caos" e Jean Perrin rilevò, da un lato, che la geometria della natura è caotica e mal si identifica nell'ordine perfetto delle abituali forme di Euclide, dall'altro che essa evoca piuttosto le complicazioni delle matematiche create intorno al 1900... .

Nel presente saggio vengono studiati oggetti naturali che hanno in comune la caratteristica di essere di forma estremamente irregolare o interrotta; per studiarli, ho concepito, messo a punto e largamente utilizzato una nuova geometria; la nozione che le fa da filo conduttore sarà designata con la parola “oggetto frattale” che si richiama all’aggettivo latino *fractus*, che significa “interrotto” o “irregolare”».

Che cosa è, quali i fondamenti, di questa nuova geometria concepita dal Mandelbrot.

La risposta è articolata. Egli osserva che intanto si tratta di una nozione intuitiva, che risale a uno stadio arcaico della geometria greca: quella nozione si riferisce alla ben nota relazione che passa fra i concetti di “cosa” e di “oggetto” (è già stato in qualche misura anticipato): il primo termine designa **dati reali** il secondo delle **idealizzazioni matematiche**. Ebbene, la dimensione fisica delle cose ha una base pragmatica, quindi soggettiva: essa esprime una scelta di “grado di risoluzione”.

Per capire, Mandelbrot suggerisce in proposito il seguente suggestivo esempio. Si voglia descrivere un gomitolo di filo. Si abbia (in mano, sul tavolo, ...) un gomitolo del diametro di (circa) 10 cm. Quale modello geometrico euclideo lo rappresenta adeguatamente? quale allora la sua dimensione euclidea reale? (il modello è un punto e pertanto ha dimensione zero,...). Una risposta non è possibile se non si precisa il punto di vista che si assume: se si parla, come si è fatto, di un gomitolo del diametro di 10 cm., (significativo è l’uso dell’unità di misura, in questo caso il cm.) allora una sfera può essere un buon modello onde la dimensione fisica del gomitolo può significativamente essere data dal numero 3. Ma si dica che “l’ingombro” del gomitolo va, per sensate ragioni sperimentali, misurato in Km.: il gomitolo sarà nello spazio degli oggetti euclidei allora ben rappresentato da un punto: la sua dimensione fisica varrà “zero”! E se si dovesse assumere come grado di risoluzione 0,1mm? ogni fibra del filo diverrebbe una colonna, la dimensione fisica della cosa di cui ci si sta occupando sarebbe nuovamente data dal numero 3. Si potrebbe continuare e la dimensione fisica continuerebbe a saltellare.

Nell’esempio portato e più in generale la *dimensione fisica* dipende dalla dimensione euclidea del modello matematico adottato, e questo dipende dal “grado di risoluzione” con cui si ritiene che una “cosa” debba essere osservata. Ma vi sono punti di vista che prefigurano situazioni in cui la descrizione euclidea della dimensione fisica non basta più. E’ per dare possibilità a questi punti di vista di una adeguata espressione formale che, nel 1975, è stato introdotto il concetto di “*dimensione frattale*”. Ma come vedremo essa si ricollega alla nozione di “*misura topologica*” di un insieme che risale alle ricerche, **tutte interne alla matematica, del tutto indipendenti dal concetto di utilità**, che si possono far risalire a Peano (1887) Jordan (1892), Cantor (1884) e poi Hausdorff (1919), Pontriagin (1932), Kolmogorov (1959),

5.4 Le coste della Bretagna

Quanto sono lunghe le coste della Bretagna (oppure la costa fra Torre del mare e Capo Noli)?

Preso in considerazione un tratto di costa in una regione accidentata, proponiamoci di misurarne la lunghezza: tale lunghezza è ovviamente almeno uguale alla distanza fra i suoi estremi. Da un punto di vista fattuale può certo avvenire che la costa presa in esame appaia sufficientemente diritta e che il precedente valore (la distanza fra gli estremi) si possa ritenere adeguato ad una prima valutazione di quella distanza. E’ ovvio tuttavia che il giudizio dipenderà dal tratto di costa considerato e che se questo appare molto

accidentato quella valutazione risulterà troppo grossolanamente approssimata: la valutazione della lunghezza di una costa selvaggia (ad es. le coste della Bretagna, suggerisce Mandelbrot), tutta “seni e golfi”, non potrà che riservare delle sorprese.

Vale la pena di riflettere più attentamente sul senso della domanda “Quanto sono lunghe le coste della Bretagna (oppure la costa fra Torre del mare e Capo Noli)?”

Non vi è dubbio che essa sottintenda una rappresentazione mentale della costa nei termini di una linea, e che per “lunghezza della costa” si intenda un numero ottenuto, sul terreno, con lo stesso processo con cui si è soliti valutare, ad es. nel disegno, la lunghezza di una linea.

Ma allora come si valuta, nel disegno, la lunghezza di una linea?

Ritorniamo per un attimo alla vecchia geometria euclidea, anche se, per la verità in Euclide un problema di questo tipo non si poteva presentare (manca infatti negli *Elementi* una critica introduzione del concetto di “linea intuitiva”; sarà invece dalla puntuale analisi di questo problema che prenderà le mosse quella parte della geometria contemporanea che nei primi anni del 1900 fu detta *Analisis situs*). Come si definisce dunque, in termini moderni, la lunghezza di un arco linea? Ad es. questo:



Si sa che vale il metodo delle spezzate:

*



basterà contare i passi necessari per andare, ad es. con un compasso a due punte di cui si sia predefinita l'ampiezza, da un estremo all'altro della linea.

Sarà allora banale, ma utile, osservare che quanto più i lati della spezzata sono piccoli tanto più, la lunghezza della spezzata fornirà una idea intuitiva della lunghezza della linea stessa.

Ma sarà poi meno banale dire: **assumiamo** che la lunghezza della linea sia “l'orizzonte numerico” delle lunghezze di tutte le possibili spezzate inscritte nell'arco AB.

Meno banale certamente.

Ecco, limitiamoci a questa osservazione: si dice “**assumiamo**”. Che significa? Forse “conveniamo di dire”? Ma allora, se “conveniamo”, il contenuto di questa convenzione non ha nulla a che vedere con ciò che è. Ebbene potrà anche sembrare eccessivo dirlo ma certamente la prassi dei matematici è questa: le definizioni valgono per il loro accettato valore sociale, chiaramente nella società dei matematici! E' così anche per fisici, cosmologi, scienziati di ogni specie? Il tema diventa arduo e resta aperto.

Comunque stiano le cose è un fatto che ogni geometra compie sul terreno, con i suoi più o meno sofisticati strumenti di misura, le stesse procedure che il matematico compie per definire la lunghezza di una linea.

Possiamo allora concludere che le sofisticate procedure dei matematici possono tranquillamente essere applicate a cose complicate quale possono appunto essere le

coste (o i profili delle montagne, o il corso dei fiumi,...) per dire poi che di esse ne abbiamo valutato la lunghezza ?

Ma gli oggetti reali sono complessi, "interrotti" e ad essi male si addice la schematizzazione euclidea: in questo senso dobbiamo riconoscere che la critica di Mandelbrot è corretta e che il corrente concetto di lunghezza di una linea forse ad essi non conviene. E così, ad es. nel caso di una costa, potrà avvenire che **quanto più piccolo sia il "passo" che consente al geometra la misura della sua lunghezza tanto più si debba tener conto di "ogni tortuosità" della costa stessa** ed avvenga che, al contrario di quanto si è detto poco sopra nei riguardi della valutazione di una linea intuitiva, aumenti a dismisura il computo dei passi da compiere e pertanto il numero che si vuole valutare quella lunghezza.

Se così è un numero "grande a piacere" varrà a valutare la lunghezza, ad es., del tratto Torre del mare - capo Noli, ma anche quello di una sua parte qualsiasi. **In questo senso si dice che il concetto di "lunghezza di una costa" (o del profilo di un monte, ...) perde ogni significato.**

Le sorprese paventate possono avverarsi.

5.5

Questo è sensato? Una analisi sperimentale dapprima ed una successiva interpretazione matematica dei risultati consentono di dire che così stanno veramente le cose: si può tranquillamente dire che non ha alcun senso parlare della lunghezza del profilo di una cosa frattale.

L'analisi **sperimentale** è stata condotta nel **1961** da **Lewis Fry Richardson**. Le ricerche e le valutazioni sono state condotte assumendo come oggetto di studio le coste della Bretagna.

Indicando con L la lunghezza della costa, con Δ la lunghezza del passo usato nella valutazione di L (L e Δ erano entrambi misurati in km.) Richardson rilevò che le coppie (Δ, L) si distribuivano in un diagramma che assumeva l'andamento di figura.

*

Richardson al fine di rendere "più leggibili" i risultati sostituì nel diagramma precedente i valori di L e di Δ con i loro logaritmi naturali; detto diversamente: determinò i valori di y e di x (lo si può fare con una piccola calcolatrice tascabile) tali che

$$L = 10^y ; \quad \Delta = 10^x.$$

Fatte queste sostituzioni il precedente diagramma assunse la forma di una retta del tipo di figura

*

la cui interpretazione era chiaramente più semplice di quella della figura precedente. Si deduce infatti subito dalla figura che fra le grandezze "y" ed "x" intercorre la relazione

$$y = - \Delta x, \quad \text{con } \Delta > 0$$

dalla quale, tenuto conto delle precedenti sostituzioni, ne seguì

$$\text{Log } L = \text{Log } \Delta^{-\Delta}$$

ed infine

$$(*) \quad L = \Delta^{-\Delta}$$

La (*) può essere riscritta

$$(**) \quad L \times \Delta^{\Delta} = \Delta^{\Delta}$$

e in essa si "legge" quello che intuitivamente si paventava: per cose dal profilo interrotto, frastagliato, complesso come appunto sono le coste della Bretagna il concetto di lunghezza del loro perimetro perde ogni significato.

E infatti:

- la relazione (**) fra L e ϵ vale per qualunque parte di quei profili relativamente ai quali essa venga sperimentalmente determinata,
- da essa si legge che quanto più ϵ è piccolo tanto più L sarà grande.

Ne segue allora che in questi casi il concetto classico di “lunghezza di una linea intuitiva” non può essere usato. Si ricorderà infatti che (nel caso classico) la lunghezza di una linea veniva definita come “il limite”, allorché il valore del passo ϵ tendeva a diventare piccolo a piacere, delle lunghezze delle spezzate in essa inscritte. Ma come si è detto poco sopra (al punto b)) questo è esattamente quello che non succede nel caso di cose frattali.

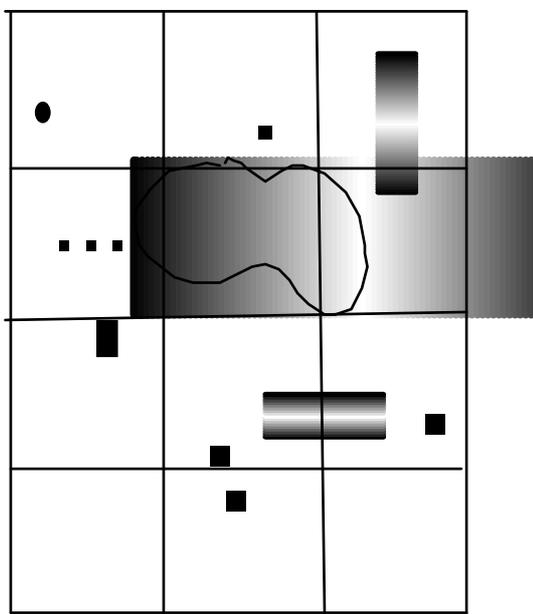
Le precedenti conclusioni sono state espresse al plurale. E' corretto. Infatti ad analoghe conclusioni, cioè ancora ad una formula identica alla (**), si giunse con osservazioni condotte sul profilo delle coste dell'Australia, sulle frontiere della Germania, del Portogallo, della Spagna: in ogni caso era stato osservato che la relazione sperimentale intercorrente fra L ed ϵ era sempre data dalla (**). Il solo elemento che distingue una dall'altra relazione, era il valore numerico di ϵ **che finiva così per assumere**, da puro valore numerico quale inizialmente era stato dal Richardson pensato, **un ruolo fisico qualificante** la natura della cosa frattale esaminata.

5.6

A questa conclusione giunse appunto Benoit Mandelbrot. Egli **ricalcolò da un punto di vista teorico** il valore di ϵ (il termine sperimentale che compare nella formula (**)) che designò col nome di “**dimensione frattale**” dell'**oggetto frattale** che si assumeva potesse simulare la cosa frattale (interrotta, frastagliata, complessa) a cui si prestava attenzione.

A tal fine riesumò il concetto matematico di **misura** di un insieme di punti, o, altrimenti detto della sua dimensione, la **dimensione topologica**.

Questo insieme si suppone debolmente strutturato, poche cioè sono le relazioni che intendiamo esistano fra i suoi elementi; esse si riducono alle solite relazioni insiemistiche di appartenenza e di inclusione e poi ad una molto vaga nozione di “prossimità” (di qui il nome di *topologia* dato allo studio di questi insiemi)



*

Misurare dunque un insieme (per un supporto intuitivo riferiamoci alla figura qui sopra riportata e che per comodità espressiva pensiamo collocato nel piano euclideo). Misurarlo, in che senso? Non certo contandone i punti, né valutando qualità euclidee quali lunghezze ed aree (o volumi). Semplicemente l'insieme oggetto di studio viene collocato (come abbiamo fatto nella figura precedente) in un contesto euclideo (il reticolo di quadrati in cui l'insieme di figura è inserito) e ci si serve poi della struttura di quest'ultimo per passare a definire qualità 'non euclidee' (nel nostro caso la nozione topologica di "misura").

La nozione di misura di un insieme presuppone dunque quella di un suo possibile ricoprimento euclideo (nel caso di figura il ricoprimento è stato fatto con quadrati).

Si osserva poi che quanto più sarà piccola la misura euclidea (lunghezze, aree, volumi) dei ricoprenti, tanto più appropriato sarà il ricoprimento stesso (ancora una volta compare in questa discussione sui concetti relativi a figure frattali la nozione di "orizzonte" o, se si preferisce, di "limite").

Al limite il ricoprimento sarà perfetto se la misura dei ricoprenti assumerà valori trascurabili. (Leibnitz avrebbe detto: della grandezza di "un soffio"); oggi molto più formalmente si dice: se "l" è, ad es. la lunghezza di un lato del ricoprente ed " ϵ " un numero "piccolo a piacere" si scelga $l < \epsilon$.

Quello che dovrebbe risultare evidente è molto più semplice: due sono i parametri che consentono la definizione della misura (topologica) di un insieme: il valore della misura del ricoprente, il numero dei ricoprenti necessari per un preciso ricoprimento.

La ricerca di Peano (Giuseppe Peano, 1858 - 1932), di Lebesgues (Henry Lebesgues, 1875 - 1941), di Hausdorf (Felix Hausdorf (1868 - 1942), ... si è mossa nella direzione di come elaborare questi dati (la grandezza degli "intorni" ricoprenti, il numero dei ricoprenti) al fine di ottenere valutazioni della misura di un insieme coerenti alla costruzione di una organica teoria di questi evanescenti oggetti del pensiero matematico.

Di quelle ricerche si è servito Mandelbrot per elaborare una nozione di "*dimensione frattale*" utile per la descrizione, classificazione e studio delle proprietà di oggetti frattali (questa è dunque la geometria frattale) capaci di simulare cose reali.

Nella edizione italiana del suo testo Mandelbrot riproduce nei seguenti termini tecnici il concetto di "*dimensione frattale di ricoprimento*": « Si consideri un insieme S in uno spazio metrico O, e un raggio $\rho > 0$. Pontriagin e Schireleman nel 1932 ricoprono S per mezzo di palle di raggio uguale a ρ usando il metodo che richiede il minor numero N di palle. Quindi facendo tendere ρ a zero, si definisce la dimensione di ricoprimento come

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(1/\rho)}$$

Il linguaggio è un poco sgrammaticato e certo ermetico, ma la sua traduzione in lingua corrente è semplice. Grosso modo si dice: "disegna, comunque tu desideri costruirlo, un insieme di punti (abbiamo tradotto: «Si consideri un insieme S»); supponi di usare la geometria euclidea per eseguire misure di lunghezza, area o infine volumi (traduzione di «in uno spazio metrico O»); ricopri con segmenti di lunghezza ρ oppure con cerchi di raggio ρ , o infine con sfere di raggio ρ la totalità di quei punti. Questa operazione la potrai

compiere in molti modi; a seconda del tuo comportamento (delle tue scelte) occorreranno un numero N diverso di segmenti, ovvero di cerchi, o ancora di sfere. Ebbene se tieni conto del valore numerico di tutti i possibili rapporti N/\square , fra loro diversi a seconda delle scelte da te fatte, l'insieme di questi valori avrà un "orizzonte" minimo (ora infine si è tradotto *): naturalmente quell'orizzonte è un numero e quel numero lo diremo la **dimensione di ricoprimento** dell'insieme di punti da te disegnato".

Mandelbrot assume come "**dimensione frattale**" di un "*oggetto frattale*" la "*dimensione di ricoprimento*" (così come era stata definita da Pontrjagin) di quell'oggetto pensato come un insieme di punti.

E poiché un **oggetto frattale** può simulare una cosa "frattale" (interrotta, frastagliata, complessa) può avere un senso supporre che una proprietà geometrica dell'oggetto frattale possa avere un **significato fisico** relativo a quella stessa cosa. E' pertanto del tutto comprensibile che Mandelbrot suggerisca di assumere come qualità di quella cosa **una proprietà geometrica della figura frattale** che la simula e pertanto in particolare quella proprietà che Pontrjagin e Schnirelman avevano designato come "**dimensione di ricoprimento**".

5.7

La "*dimensione fisica*" di una cosa è dunque da Mandelbrot definita come la "*dimensione di ricoprimento*" della linea frattale che la simula: si dirà brevemente la sua "**dimensione frattale**". Fra le qualità delle cose (lunghezze, aree, volumi, peso, colore, ...) che ci circondano può allora essere utilmente annoverata anche la "*dimensione frattale*".

Si pongono pertanto due problemi:

- a) riconoscere l'aspetto frattale di una cosa individuare un oggetto frattale che la simuli.
- b) Definire e valutare il valore della dimensione frattale di un oggetto frattale (in particolare la dimensione frattale dell'oggetto frattale scelto).

Vediamo di proporre una soluzione di questi due problemi nel caso particolare delle coste della Bretagna.

Nei riguardi di una costa generica sembra indubbio riconoscere in essa un carattere interrotto, frastagliato, ... "frattale" e dunque pensare ad essa nei termini di un oggetto frattale. Nel caso della costa della Bretagna le ricerche sperimentali di Richardson hanno condotto alla relazione

$$(**) \quad L \times \square^{\square} \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$$

dove con L si è indicato il valore della lunghezza di una "spezzata" che abbia per vertici punti opportunamente situati lungo la costa, e con \square il "passo" (il grado di risoluzione) che determina la precisione nella valutazione di quelle lunghezze. Si è visto poi che dalla (**) segue che per ogni tratto di quella costa, per piccolo che esso possa essere pensato, il valore di L può assumere valori infiniti.

Quale allora l'oggetto frattale che adeguatamente può simulare la costa della Bretagna? Al fine di una decisione in questo senso occorre scegliere nell'arsenale delle figure frattali una figura tale che:

- in primo luogo e a grandi linee, ben rappresenti l'andamento visivo della costa,
- la "*dimensione di ricoprimento*" dell'insieme di punti definito dalla figura scelta, sia adeguato ad eventuali controlli sperimentali;

Ebbene possiamo provare che la linea di costa della Bretagna sia ben simulata dalla curva di Koch (fiocchi di neve; Helge von Koch).

Infatti (La prova è alquanto tecnica; chi è allergico ai simboli é autorizzato a saltarla).

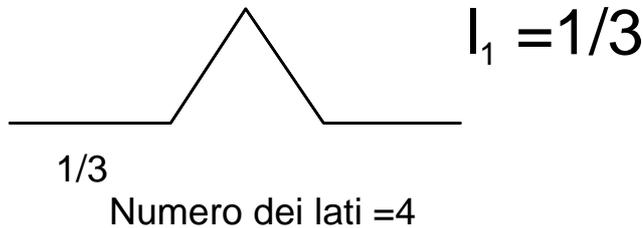
- Sia AB è il lato di riferimento su cui si costruisce la curva

A

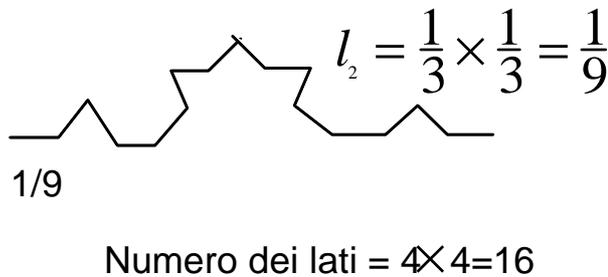
B

- Le lunghezze dei lati della spezzata di Koch (il “passo”) valgono $\square = 1/k$ dove “k” assume i valori: 3 , 9 , 27 , rispettivamente per i livelli ricorsivi 1, 2, 3 , della spezzata.

Livello 1



Livello 2



*

- Ogni spezzata è poi costituita, a seconda del livello, da 4 , 16 , 64 , ... lati.
- E' come dire che essa è **ricoperta** da N =4 , N=16 ,N= 64 , ... segmenti di lunghezza “ \square ”
- Allora la relazione (che nello schema di Mandelbrot sostituisce quella fornita da Pontrjagin per definire la “*dimensione di ricoprimento*”):
- $(***) \quad \square = 1/ N^{1/D}$
diviene ai diversi livelli:

$$\begin{aligned} 1/3 &= 1/ 4^{1/D} \\ 1/9 &= 1/ 16^{1/D} \\ 1/27 &= 1/ 64^{1/D} \end{aligned}$$

.....
ed una piccola calcolatrice consente di controllare che **in ogni caso** si ha $D=1,26$

- Il numero 1,26 è dunque associato **ad ogni livello di una pseudo-curva di Koch e dunque anche alla curva "limite" di Koch.**
- Esso è allora anche il valore della sua dimensione di ricoprimento e dunque della dimensione frattale della costa..

E' immediato controllare che questo valore è conforme ai risultati sperimentali di Richardson. Infatti si era posto

$$D-1 = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\Delta}}$$

Dunque $\frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\Delta}}$. **Il concetto di dimensione frattale consente di ricalcolare da un punto di vista teorico il valore di $\frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\Delta}}$ introdotto, da un punto di vista sperimentale, da Richardson.**

Si è visto che non è possibile parlare della lunghezza di una costa se non si precisa il valore del passo Δ usato per valutarla: al tendere di Δ a zero qualsiasi tratto di costa ha lunghezza infinita.

Questa affermazione di carattere **intuitivo** è giustificata da un punto di vista **razionale** nel modello di Koch. Ecco come procedere (Vedi avvertenza precedente: saltare a piè pari).

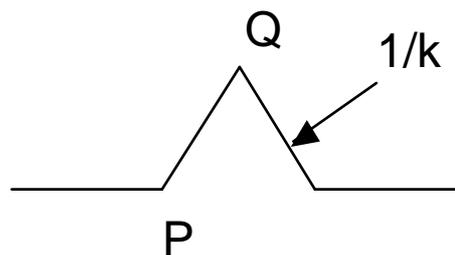
- Siano P,Q due punti qualsiasi di una **pseudo-curva** di Koch quanto vale la lunghezza di un arco di **curva** di Koch fra i punti P,Q?
- Supponiamo che la lunghezza di PQ sia data da un sottomultiplo di ordine k di AB (il segmento base cui è associata , dalla definizione ricorsiva, una pseudo curva di Koch di livello zero).
- Allora gli archi di pseudo curve di Koch di livello 1,2,3,... fra i vertici P,Q hanno successive lunghezze:

$$l_0 = 1/k$$

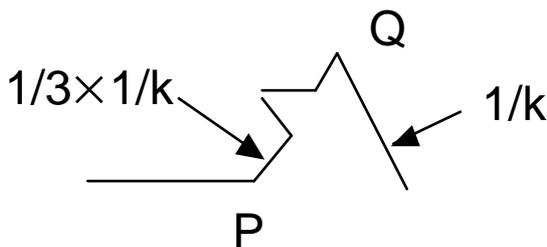
$$l_1 = 1/3 * 1/k * 4$$

$$l_2 = 1/3 * l_1 * 4$$

$$l_n = 1/3^n * 4^n * 1/k = (4/3)^n * 1/k \rightarrow \infty$$



$$l_0 = 1/k$$



$$l_1 = 1/3 * 1/k * 4$$

*

- d) Dunque un qualunque arco di **curva** di Koch (non di una pseudo curva), **proprio come qualunque tratto di spiaggia**, ha lunghezza infinita!

Ma se è così per le lunghezze non è così per la dimensione frattale che per questo assume, per la curva di Koch così come per le pseudo curve, un significato nel senso di essere un **valore finito caratteristico** di quelle figure geometriche.

Le pseudo curve di Koch e l'associato concetto di dimensione frattale sono un buon modello teorico capace di ben descrivere la situazione reale di una spiaggia (o tratto di costa).

La nuova geometria cui Mandelbrot affida nuove possibilità descrittive e predittive è, all'opposto di quanto avviene per la geometria euclidea, costruita a partire **direttamente** dal concetto di dimensione, la "*dimensione frattale*".

Il concetto di "**dimensione frattale**" ed il concetto di "**verosimiglianza**" possono da un lato introdurre un indicatore misurabile (la dimensione frattale) della irregolarità e salvaguardare pertanto la previsione con la progettazione di esperimenti che forniscano risultati quantitativi misurabili, dall'altro (la verosimiglianza) consentire la costruzione di "*modelli aleatori*" dei fenomeni osservati.

5.8

La curva di Koch è un buon esempio della utilità di concetti quali quello di "dimensione frattale" di una figura, meglio di un "insieme". Non è stato il primo. Anzi è stata proprio l'esibizione di "linee patologiche", quale appunto è la curva di Koch (una linea priva in ogni sua parte di una retta tangente: a ben osservare e al limite è un insieme di asperità) a proporre l'esigenza di una chiarificazione del concetto di "linea".

Fra le prime linee patologiche va ricordata la "curva di Peano Hilbert" (la citeremo con PH). Essa gode della seguente (certamente patologica) proprietà: "Assegnato un quadrato Q la PH è, nel senso intuitivo, una linea non intrecciata che passa per ogni punto di Q".

Detto diversamente: PH è una linea intuitiva, dunque nel senso intuitivo del termine ha "dimensione uno", e tuttavia possiede tanti punti quanti ne ha Q, un quadrato, e dunque ha "dimensione due".

Ecco come definire, in senso intuitivo la costruzione di PH.

- Sia assegnato un quadrato Q; la linea PH è un insieme ordinato di punti di Q la cui successione è riconoscibile se si pensa che ogni punto sia il vertice di una spezzata aperta la cui costruzione viene definita ricorsivamente a livelli successivi nel modo che segue

Livello "zero"; la spezzata è designata con L_0^*

$(PH)_0$: é l'insieme costituito da un unico punto, il centro del quadrato Q.

Livello "uno"; L_1^*

$(PH)_1$: é l'insieme dei vertici della linea spezzata L_1^* così definita, "Si divida Q in quattro quadrati $Q_1Q_2Q_3Q_4$ ordinandoli in senso **antiorario**; la spezzata L_1^* ha per vertici gli insiemi $(HP)_0$ relativi ai quadrati Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .

Livello “due”; L_2^*

(PH)2: é l'insieme dei vertici della linea spezzata L_2^* così definita, “Si divida Q in quattro quadrati $Q_1Q_2Q_3Q_4$ ordinandoli in senso **orario**. Si collochi

- L_1^* in Q_1
- L_1^* , ruotato in senso **antiorario** di 90 gradi, in Q_2
- L_1^* , ruotato in senso **antiorario** di 90 gradi, in Q_3
- L_1^* , ruotato in senso **antiorario** di 180 gradi, in Q_4

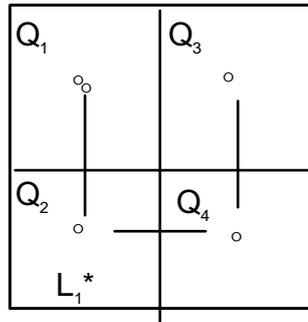
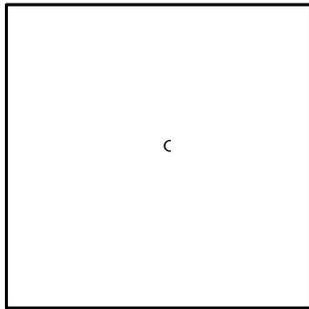
Tre segmenti a, b, c paralleli ai lati del quadrato Q , **ordinati in senso orario**, collegano le parti L_1^* onde formare L_2^* ”.

Livello “tre”; L_3^*

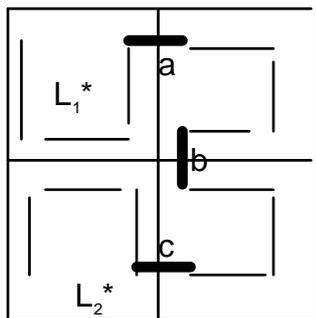
(HP)3: é l'insieme dei vertici della linea spezzata L_3^* così definita, “Si divida Q in quattro quadrati $Q_1Q_2Q_3Q_4$ ordinandoli in senso **antiorario**. Si collochi

- L_2^* in Q_1
- L_2^* , ruotato in senso **orario** di 90 gradi, in Q_2
- L_2^* , ruotato in senso **orario** di 90 gradi, in Q_3
- L_2^* , ruotato in senso **orario** di 180 gradi, in Q_4

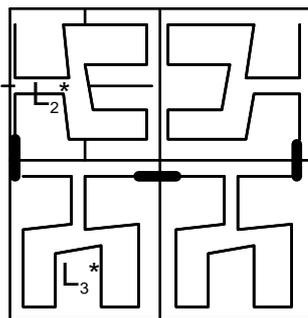
Tre segmenti a, b, c paralleli ai lati del quadrato Q , **ordinati in senso antiorario**, collegano le parti L_2^* onde formare L_3^* ”.



L_1 : quattro punti



L_2 : sedici punti



L_3 : sessantaquattro punti

.....

Gli antecedenti matematici cui fa riferimento Perrin, e che hanno fatto da supporto alle intuizioni di Mandelbrot, risalgono ai primi anni del 1900 e andavano allora genericamente sotto il nome di “*Analysis situs*”; oggi si parla di “*Topologia*”.

Nel contesto delle riflessioni di Mandelbrot la matematica appare davvero come una “*Serva padrona*”: una nobile serva, certamente, e tuttavia una serva (nel senso nobile di essere utile) ma, per Perrin, quella serva è veramente padrona: le radici della nuova

geometria stanno negli attuali studi di *topologia*, nelle antiche ed apparentemente artificiose disquisizioni della “*analisi situs*”, ricerche e studi tutti interni alla matematica.

Il testo del Mandelbrot può essere letto come un manifesto contro il sapere compassato della geometria classica, una matematica incapace di dire “come stanno veramente le cose”: ma è un manifesto, se lo è, contro il nulla.

E' vero, le nubi non sono sfere, gli alberi nei loro tronchi non sono cilindri né le montagne conici, ma è anche vero che l'uso della matematica è stato ed è tuttora adeguato a rappresentazioni, nella forma di modelli, di come è opportuno supporre che stiano le cose. Sostituire i modelli euclidei con quelli di Mandelbrot? Certo si può fare, ed è stato fatto, ma i modelli matematici frattali o classici che siano, non importa, restano modelli.

A meno che non si pensi che i modelli esprimano ciò che veramente è; ma allora la polemica anti-euclidea appare contraddittoria. Per fondare una nuova epistemologia non basta certo togliere di mezzo la “pulizia” euclidea capace di descrivere gli archetipi della realtà, così come il pensiero la pensa, e sostituirla poi con il casuale mandelbrotiano se tuttavia si resta ancorati ad una visione platonica del mondo, e si pensa che questo casuale possa dire “come stanno veramente le cose”.

Un manifesto contro il nulla. Esistono in natura “cose frattali” nel senso di Mandelbrot, cioè di cose che popolano la nostra esperienza e tali che in esse ogni più piccola parte sia una immagine ridotta della totalità? No tali cose non esistono. E infatti ogni cosa ha una forma, un contenuto (così appunto si esprime Mandelbrot) che NOI gli assegniamo a seconda del punto di vista da cui ci poniamo. Come sempre avviene in fisica “l'oggetto” che descrive la “cosa” è un modello, provvisorio e necessario fin dove sia utile, della “cosa”.

Certo esistono “oggetti frattali”, costruzioni del nostro pensiero e magari suscettibili di una (appropriata) rappresentazione intuitiva. La loro esistenza sta nel fatto che sono stati pensati. Le rappresentazioni delle coste della Bretagna, delle galassie, dei crateri della Luna **suggeriscono** appunto come adeguate opportune descrizioni con “oggetti frattali”: vale dunque la pena di farlo.

Opportune descrizioni in un adeguato e coerente linguaggio. Ma allora l'euclideo paradiso perduto deve essere altrove ritrovato: come si è detto è stato ritrovato nelle contemporanee ricerche di **topologia**. Ed ecco che così la serve ritorna a farla da padrona.

C. NECESSARIO PROBABILE E POI?

Si ritorna alla frase iniziale del citato passo di Monod: essa rimanda alla struttura fine della cose.

Il commento al punto **7.** è dedicato a ribadire il carattere non epistemico dello strumento probabilistico nella descrizione dell'Universo.

Il punto 7.1. è dedicato a delineare il concetto di “fotone” è una scelta didattica importante: il “fotone” è un oggetto classico, è un elemento del campo elettromagnetico, ma gode delle proprietà tipiche degli oggetti della fisica quantistica.

Il punto 7.2. propone un paradosso classico ed allarga la prospettiva su mondo dei fenomeni dei “quanti”

Il successivo punto **7.3.** non appartiene più ai commenti del testo. Si apre una nuova prospettiva nel concetto di evoluzione: la diversità appartiene al reale nella sua fase cosmica.

Infine con 7.4. si apre una finestra sul, per me impervio e sconosciuto cammino, mondo delle riflessioni metafisiche. I matematici conoscono ovviamente l'esistenza di quel mondo ma, **come matematici, ad esso non sono interessati**

Il gatto di Schrodinger

7.

«Gli eventi iniziali **elementari**, che schiudono la via dell'evoluzione ai sistemi profondamente conservatori rappresentati dagli esseri viventi sono **microscopici e fortuiti**.»

7.1. Fotoni

Gli eventi elementari rimandano ad una struttura delle cose più semplice di quella delle molecole e degli stessi atomi: mettono in causa il mondo delle "particelle". Quelli che si ritiene siano i costituenti ultimi della materia: elettroni, neutroni, quark,....

Il mondo degli "oggetti" e non delle "cose": gli oggetti non appartengono alla percezione! Sono costruzioni mentali e che tuttavia il metodo sperimentale vuole siano giustificati da fatti.

I fatti di cui qui si deve parlare costituiscono l'indice di un corso di fisica elementare.

- a) Riflessione e rifrazione della luce. La loro interpretazione fenomenologica nelle leggi dell'ottica geometrica di Snellius (van Royen, 1581-1626) e Cartesio (René Descartes, 1596-1650);
- b) Fenomeni di interferenza e diffrazione nella propagazione per onde della materia (ad es. nell'aria). La loro "spiegazione" nel quadro della meccanica classica;
- c) Fenomeni di interferenza e diffrazione nella propagazione per onde della luce (Huyghens). La loro giustificazione di natura fenomenologica nelle leggi della "ottica fisica" di Fresnel (1788-1827);
- d) I fatti dell'elettromagnetismo (Hans Cristian Oersted-1820); l'induzione magnetica (Michael Faraday-1831) e l'introduzione fenomenologica del concetto di "campo";
- e) Le leggi di Maxwell nel quadro della teoria dell'elettromagnetismo (James Clark Maxwell, 1831 - 1879);
- f) Corpo nero Kirchoff. La legge fondamentale di Max Planck-1900. L'effetto fotoelettrico (Albert Einstein - 1905);
- g) Fotoni.

Può bastare come richiamo a fatti da tutti, più o meno, conosciuti.

Altre parole sono di dominio pubblico: elettroni, protoni, neutroni, le così dette particelle elementari.

Fatti sperimentali hanno suggerito l'introduzione di questi oggetti e di modelli capaci di regolare il loro uso nel mondo di quella parte delle teorie della fisica contemporanea, oggi detta "meccanica quantistica".

Ecco, può essere opportuno soffermarsi alquanto sui "quanti di luce", i "fotoni". Forse potrà apparire come una parentesi un po' troppo lunga; non è così se si pensa che le teorie fondamentali che reggono la fisica contemporanea sono la teoria della Relatività generale e la Meccanica quantistica: il concetto di fotone appartiene alla fisica classica ed alla meccanica quantistica, si inserisce con naturalezza nei concetti della termodinamica ed apre la strada alle interpretazioni probabilistiche dei fatti del mondo microscopico.

Tutto è cominciato il 20 ottobre del 1859 (il 24 novembre di quello stesso anno Darwin pubblicava sull'*Origine delle specie...*): Gustav Kirchoff a seguito di sue osservazioni sugli spettri di assorbimento della luce solare da parte di sostanze allo stato gassoso propose alla comunità dei fisici la ricerca di una legge di carattere universale capace di descrivere la legge di distribuzione dell'energia raggiante negli stati associati alle frequenze in cui può venire dispersa. La risposta, completa ed esauriente, alla sfida proposta fu data quaranta anni dopo da Ludwig Planck, che la elaborò nella sua forma definitiva fra l'ottobre ed il dicembre del 1900.

Se ci si espone alla "luce" sentiamo "calore"; in termini scientifici si dice che la radiazione luminosa trasporta calore, dunque energia. Viene trasportata in "quanti" (unità di energia), e l'energia che ogni "quanto" trasporta varia con la frequenza della radiazione (i colori dell'arcobaleno). Così è stato asserito da Planck. Ma Planck non si accontentò di questo, e, così come Kirchoff voleva, descrisse anche come l'energia totale irradiata venisse distribuita nelle varie frequenze.

Questi "quanti" come vanno pensati? Non vanno pensati. Gli si attribuiscono delle qualità quantificabili e si dice in quale ambito teorico queste qualità debbano essere collocate.

Poiché sono "quanti di luce" l'ambito teorico sarà quello dell'ottica così come viene descritta al livello della teoria elettromagnetica.

Ma l'effetto fotoelettrico (Einstein) manifesta una qualità "corpuscolare" da attribuire a quegli oggetti che Planck ha designato col nome di "quanti di energia". Dunque essi devono appartenere anche al regno della meccanica classica e, in particolare, della meccanica relativistica.

L'ipotesi relativistica significa che le qualità di un quanto non dipendono dal sistema di riferimento (inerziale) in cui l'osservatore si colloca. Così se ad es. si tiene conto del fatto che la terra ruota intorno al proprio asse ed un osservatore, ad es. a Sidney, è in uno stato di moto relativo rispetto ad un secondo osservatore che ad es. stia a Roma, l'ipotesi relativistica vuole che identiche siano le loro osservazioni, in particolare sui fatti elettromagnetici di cui parliamo.

Se di questo si tiene conto e si ricorda che non esiste alcun sistema di riferimento in cui il fotone sia in quiete (In modo suggestivo si usa dire che i fotoni a riposo nel sistema del laboratorio non hanno massa. In effetti il concetto di un fotone in quiete è privo di significato. L'osservazione non è banale: provate a non parlare di fotoni ma, così come è, di campo elettromagnetico: un campo elettromagnetico in quiete è un non senso, semplicemente non esiste. Il concetto di campo è dinamico) si prova che ogni fotone gode della proprietà di possedere una quantità di moto (il prodotto della massa per la velocità).

L'ambiente teorico in cui si parla di fotoni dovrebbe dunque collocarsi negli ambiti classici della meccanica relativistica e dell'elettromagnetismo. Vedremo che questa classificazione, in larga misura soddisfacente, non consente di descrivere **tutte** le qualità che, sulla scorta dell'esperienza, valgono a definire il concetto di fotone.

La teoria elettromagnetica prevede che un fascio di luce eserciti una pressione su di una "cosa" riflettente (ad es. un comune specchio).

Ma un fascio di luce che si propaghi su rette parallele, dal punto di vista di una teoria corpuscolare, è un insieme di fotoni che viaggiano nella stessa direzione. Essi allora, dal

punto di vista della meccanica classica, poiché possiedono quantità di moto, se investono nel loro moto quella “cosa” che abbiamo detto “specchio”, rinculano e pertanto esercitano sulla cosa una pressione.

Si prova che i due punti di vista conducono ad uno stesso verificabile risultato quantitativo; il punto di vista elettromagnetico e quello meccanico sono pertanto, nei riguardi di questa prova sperimentale, fra loro equivalenti.

Un fotone ed un elettrone sono due particelle; dal punto di vista della meccanica classica due punti materiali dotati di quantità di moto. Possono urtarsi. Le leggi della meccanica descrivono il comportamento dei punti dopo l'urto. I fatti giustificano le previsioni (Effetto Compton - 1922).

Ma le cose non sono così semplici. L'effetto Compton non è descrivibile nei soli termini di un urto fra punti materiali e dunque nei termini della meccanica classica: esso infatti comporta il concetto della diffusione di una radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone.

Ma anche l'uso di concetti dell'elettromagnetismo classico non è sufficiente. E allora per giustificare la relazione sperimentale che corre fra la frequenza della radiazione diffusa e l'angolo di diffusione (fra la direzione della radiazione diffusa e quella in cui si sposta l'elettrone) si usa il concetto di fotone pensato come un “quanto” **indivisibile** di energia.

Nell'esperimento di Compton i fotoni NON possono dividersi: un fotone di frequenza ν trasporta in ogni caso l'energia $h\nu$ e la quantità di moto $h\nu/c$. Il concetto di “pacchetto” di energia che un fotone porta con sé è un concetto quantistico. L'effetto Compton garantisce l'indivisibilità del fotone: il granulo minimo di energia, ciò per cui esiste una parte della fisica che si è detta “quantistica”.

Al riguardo è impressionante l'osservazione dell'effetto fotoelettrico nel caso della luce emessa da una stella. La luce è stata emessa migliaia di anni fa e si è sparpagliata nello spazio. Per semplificare diciamo che la stella è un punto che emette luce sotto forma di treni d'onde sferiche (Diciamo, lo strato che compone un pallone da calcio). L'intensità della luce emessa è, sullo strato, proporzionale a $1/r^2$, e nel modello classico, la quantità di energia trasportata da un singolo treno d'onde attraverso un'area unitaria dello strato a una distanza r è proporzionale a $1/r^2$. Poiché nel caso della stella r è molto grande avviene che la fotocella riceva una frazione piccolissima dell'energia emessa con il treno sferico di onde: a un certo punto dovrebbe cessare di segnalare la presenza di radiazione. **NON AVVIENE COSÌ: è vero la frequenza di conteggio della fotocella diminuisce come $1/r^2$, ma la fotocella continua a segnalare l'arrivo di energia e lo segnala per “quanti” $h\nu$ come se la sorgente fosse una lampada vicina alla fotocella.**

Dunque i fotoni non si “dividono”? E' necessario precisare. Ogni “fotone” è associato alla energia trasportata da un campo elettromagnetico di assegnata frequenza. Allora si domanda: per quella assegnata frequenza può avvenire che un fotone, che porta con sé un assegnato granulo di energia, possa “dividersi” nel senso di perdere la sua identità “puntuale” e dunque trovarsi, nello stesso istante, con la stessa frequenza, portando indiviso lo stesso granulo di energia, in punti distinti nello spazio?

La risposta è SI.

Risposta sconvolgente. Giustificata in centinaia di testi scolastici o di divulgazione e che va sotto il nome di “esperimento delle due fenditure”.

Dal punto di vista dell'ottica fisica e dunque dell'elettromagnetismo l'esperimento delle due fenditure semplicemente dice che un fascio di luce, interrotto nel suo cammino da uno schermo su cui sono state praticate due fenditure, si ritrova al di là dello schermo nello stato di due fasci che hanno origine nelle fenditure e sommano, in alcuni punti esaltando in altri annullando, le energie dai fasci trasportate.

Ma proviamo a interpretare questo stesso esperimento nello schema della Fisica quantistica.

Un fascio di luce è un insieme di fotoni; fotoni, dunque punti materiali dotati di quantità di moto. Ovviamente ogni fotone passa per una sola fenditura. Se i fotoni sono tanti, e molti fra loro colpiscono lo schermo nello stesso istante, alcuni passano per una prima fenditura altri per la seconda. Il fenomeno descritto da Huyghens potrebbe essere giustificato dalla interazione fra fotoni diversi che superano nello stesso istante le due fenditure.

I fatti dicono che così non possono andare le cose.

Anche se il fascio si riduce a così debole intensità che un unico e solo fotone possa nello stesso istante superare le fenditure, anche in quel caso si riproducono nel tempo i fatti descritti e giustificati da Huyghens.

Proviamo a "lavorare" con un singolo fotone. Ricorderete che nel caso dell'uso di una fotocella per valutare l'energia raggiante emessa da una stella si era detto che il **conteggio** degli scatti di questa era coerente con l'ipotesi classica della distribuzione dell'energia su di uno strato sferico, e che, in ragione della distanza, era molto debole. Dunque, un singolo fotone attraversa l'apparato delle fenditure, e finisce su di una fotocella. Se così avviene questa scatta e possiamo passare al **conteggio** degli scatti; nel tempo questi testimoniano l'esistenza di un effetto di diffrazione esattamente così come vuole la teoria classica dell'elettromagnetismo.

Ecco, si supponga che in questo istante, un ulteriore fotone abbia fatto scattare la fotocella: attraverso quale fenditura è passato il fotone?

La prova sperimentale induce a dire che è passato attraverso entrambe le fenditure.

E infatti. Se alcuni fotoni passano casualmente per una prima fenditura, altri per la seconda solo poche fotocelle saranno interessate al conteggio: quelle su cui convergono i fotoni che passano per l'una (un primo gruppo) oppure per l'altra (un secondo gruppo). NON SI AVREBBE UNA FIGURA DI DIFFRAZIONE.

Sappiamo che non è così. Dunque i singoli fotoni fanno scattare singole fotocelle MA IN MODO CHE al conteggio si manifesti la voluta figura di diffrazione.

Poiché la magia non appartiene alla fisica dobbiamo dire che questo comportamento definisce una qualità dell'oggetto fotone. I fatti sono questi e il compito della fisica è quello di descriverli: i fotoni non sono palle da biliardo, le loro qualità non discendono dalla osservazione percettiva e ma da ripetibili valutazioni sperimentali. Alla luce di questa osservazione si deve dire che nei fatti descritti non si dà paradosso o mistero.

I fotoni non si dividono, posseggono qualità corpuscolari (ad es. una quantità di moto), ma come un campo posseggono le qualità ondulatorie proprie delle onde elettromagnetiche.

Si può dunque studiare la propagazione dei fotoni nello spazio per mezzo delle equazioni di Maxwell ma l'energia che l'onda trasporta non può essere spalmata con continuità sul suo fronte.

Ora i portatori di energia sono gli indivisibili fotoni. E allora se avviene che misure dell'energia calcolate classicamente risultino corrette dobbiamo dire che quelle misure segnalano l'esistenza di valori medi su di un gran numero di fotoni ciascuno dei quali porta con sé il granulo □□

Se una sorgente emette fotoni l'energia emessa in un certo intervallo di tempo classicamente si distribuisce su di una superficie sferica. Sia q la frazione dell'energia emessa raccolta dalla superficie di una fotocella collocata in un punto del fronte dell'onda: quale valore medio esprime questo numero **minore di uno**. La risposta è semplice: tutti i fotoni emessi si sono distribuiti sull'intera superficie del fronte d'onda ma solo la parte q della totalità ha fatto scattare la fotocella. In modo diverso si può dire: se un fotone viene emesso dalla sorgente non è detto che esso venga raccolto dalla fotocella ed allora q esprime la **probabilità** che un fotone emesso dalla sorgente passi per il punto in cui la fotocella è stata collocata.

Una deduzione quasi lapalissiana, e che sta all'origine della fisica contemporanea.

L'introduzione nella fisica del classico concetto di campo elettromagnetico ha avuto nella fisica il solo scopo di descrivere interazioni fra cariche elettriche. E' stato un concetto comodo e ha condotto a pensare l'energia distribuita con continuità nel campo con una intensità nei suoi singoli punti proporzionale al quadrato della ampiezza del campo in quel punto. Ora, cioè con l'introduzione del concetto di fotone, sappiamo che il quadrato dell'ampiezza del campo in un punto è proporzionale alla probabilità (il numero q di cui poco sopra si è detto) che un fotone venga osservato in prossimità di quel punto.

Attenzione. Le teorie fisiche, fondamentali o meno che siano, non sono ideologie. E così potrebbe avvenire che sia più comodo descrivere in modo diverso da come è stato fatto l'insieme dei fatti che dal novembre del 1859 in poi hanno fondato la struttura della fisica contemporanea.

Che dire? In alcuni casi, si è visto, le spiegazioni classiche e quantistiche si equivalgono; queste ultime potrebbero non essere necessarie. Ma è possibile dichiarare falsa l'ipotesi quantistica? Ha trovato la sua ragione nei fondamentali (e geniali) lavori di Plank (distribuzione della energia raggiante di un "corpo nero") e di Einstein ed abbiamo ricordato l'effetto Compton.

Nel 1905, a seguito della pubblicazione da parte di Einstein sull'effetto fotoelettrico (che gli valse – 1921 - il premio Nobel), Robert A. Millikan, un fisico di grande valore cui si devono accurati studi sulla natura dell'elettrone, scriveva: "l'equazione di Einstein per l'effetto fotoelettrico appare in ogni caso capace di prevedere esattamente i risultati delle osservazioni e ...tuttavia allo stato attuale sembra del tutto insostenibile". Ma, molti anni più tardi (1948), così descriveva le proprie posizioni: "Passai dieci anni della mia vita a sottoporre a controlli quell'equazione di Einstein del 1905; contrariamente ad ogni mia aspettativa, fui costretto nel 1915 ad ammettere che era verificata con certezza, nonostante sembrasse assurda poiché contraddiceva tutto ciò che si sapeva sull'interferenza della luce".

La fisica aveva fatto grandi progressi, e Millikan aveva ammorbidito le proprie posizioni.

Per fasci di oggetti quali elettroni, protoni, neutroni, .. insomma per le così dette “particelle” si ritrovano i risultati sperimentali relativi alle “due fenditure”.

I fatti vogliono che il comportamento macroscopico, quello osservabile, di quegli oggetti sia ambiguo. Va cancellato dal mondo del microcosmo il concetto di una assegnata grandezza associata ad una particella: l'esempio che usualmente si propone è quello della sua posizione ovvero della sua velocità. Non appartiene al mondo del microcosmo dire che questa particella si trova qui oppure là, che viaggia con questa o con quella velocità. La categoria di una definita qualità associata ad una particella va sostituita con quella di coppie di qualità che fra loro si escludono e che con definite probabilità entrambe appartengono all'oggetto. Ora le coppie di qualità definiscono l'oggetto. Non sarà possibile dire la posizione di un elettrone ovvero di un quanto di energia; si dirà: l'elettrone tal dei tali viaggia, probabilmente con una velocità prossima a tanto, se con buona probabilità si trova nei pressi del punto tal dei tali.

Crollano le usuali descrizioni classiche; perde di significato parlare di istanti, di posizioni, di traiettorie e via dicendo. Il mondo (ovviamente: il mondo delle particelle) viene descritto in termini probabilistici di coppie di grandezze complementari.

Solo l'osservazione ridarà certezze, dunque crolla la previsione certa, il fatto esiste nel momento della sua osservazione NON prima.

Sarà così? Dunque Plank, Einstein, De Broglie, Heisenberg, Schrodinger, Dirac, ... e siamo al 1926. La meccanica quantistica assume la sua formulazione definitiva; ma è ben noto che alcuni dei padri fondatori della teoria, Plank, Einstein, Schrodinger, hanno manifestato la loro profonda insoddisfazione; un titanico sforzo ha visto contrapposti Albert Einstein e Niels Bohr. In questi anni è emerso un concorde atteggiamento di insoddisfazione nei riguardi della “formulazione ortodossa” della teoria, quella elaborata dalla “Scuola di Copenhagen” (Bohr, Heisenberg, Born,...), e che brevemente (e certo malamente) poco sopra ho descritto.

Ciò malgrado la meccanica quantistica resta un fondamento della contemporanea concezione scientifica del mondo.

E così come è avvenuto per l'evoluzionismo darwiniano, per la genetica, per la teoria della relatività ristretta e per la teoria generale della gravitazione (relatività generale) la meccanica quantistica pone domande (NON fornisce e non deve fornire risposte) alla Cultura.

E' classico al riguardo citare, anche se in modo un poco frivolo, il gatto di Schrodinger.

7.2. Il gatto di Schrodinger

Morowitz scrive: «Il problema che dovevano affrontare i fisici quantistici può essere espresso nel modo migliore ricorrendo al famoso paradosso: “Chi ha ucciso il gatto di Schrodinger?” Si immagina che un gatto sia messo in una scatola chiusa insieme con una fiala di veleno. Un martelletto può scattare ed infrangere la fiala se attivato da un contatore che registra eventi casuali. L'esperimento dura abbastanza perché si possa dire che il martelletto scatterà con una probabilità eguale ad un mezzo. Il problema è se l'atto di guardare (cioè la misurazione) uccide o risparmia il gatto.

Questo esempio riflette una profonda difficoltà concettuale. Un sistema complesso può essere descritto soltanto parlando della probabilità da assegnare ai possibili esiti di un esperimento?» Ora per decidere fra varie alternative che in un esperimento possano presentarsi è necessaria una misurazione: questa misurazione è ciò che costituisce un

evento (un “fatto”), la probabilità che il fatto avvenga è una “astrazione matematica”: ma allora **l’unica descrizione corretta di ciò che avviene (non di ciò che “è”) è dire il risultato di una osservazione: l’evento fisico e la mente che lo descrive sono inseparabili.**

Secondo il premio Nobel Eugene Wigner le leggi della Meccanica quantistica non possono essere espresse in modo coerente senza far riferimento alla coscienza: lo studio scientifico del mondo porta alla conclusione che la realtà ultima è data dalla coscienza.

Alcuni cenni al linguaggio relativo al fenomeno della polarizzazione della luce.

Per capire le osservazioni di Morowitz è utile un piccolo passo indietro e parlare brevemente dei fatti che hanno condotto a formulare la Meccanica quantistica.

Siano O1,O2 due dischi di plastica polaroid (quella usata per fabbricare occhiali da sole); Supponiamo che i piani a cui essi appartengono siano paralleli; un proiettore P illumini uno schermo S ed infine si interponga la coppia (O1,O2) sul cammino del fascio di luce che da P va ad S. In generale, allorché si interpone (O1,O2) avviene che l’illuminazione di S si attenua, ma avviene anche che ruotando un disco rispetto all’altro sia sempre possibile fare in modo che (e questo avviene per qualsiasi coppia di polaroid) lo schermo S non appaia illuminato. Si dirà che i polaroid sono **incrociati**; se, a partire da questa posizione reciproca di O1,O2, si ruota ancora uno dei due polaroid di un angolo retto si passa da una situazione in cui lo schermo è buio ad una di massima illuminazione: in questa nuova situazione si dirà che i polaroid sono **paralleli**. Si dice ancora che la luce emessa da P è stata **polarizzata** dal primo polaroid che ha incontrato (diciamo O1) e che il secondo polaroid (O2) ha la funzione di un **analizzatore**: esso definisce il **piano di polarizzazione** della luce polarizzata: con questa espressione (piano di polarizzazione) si intende un qualsiasi piano passante per i centri dei due polaroid allorché questi sono paralleli. Fissato il piano di polarizzazione si valuteranno rispetto a questo le rotazioni di O2.

Siano ancora O1,O2 due polaroid; poiché un piano qualsiasi può essere assunto come piano di polarizzazione della luce che ha attraversato O1, conveniamo che in ogni caso questo sia il piano verticale passante per l’asse dei dischi O1,O2. Si dirà allora che O1 è un “polarizzatore ad asse verticale” e che la luce è stata “polarizzata verticalmente”. Una freccia verticale F1 disegnata su O1 può segnalare queste convenzioni, se O2 è “parallelo” ad O1 allora una freccia verticale su O2 potrà segnalare questa situazione di parallelismo: le frecce f1,f2 risultano allora, e ovviamente, parallele. Ciò convenuto una rotazione fra i due polaroid sarà segnalata dall’angolo α fra le due frecce f1,f2 ed i due polaroid appariranno “incrociati” se $\alpha=90$.

Il principio (quantistico) di sovrapposizione. Sia P una sorgente di luce, O1 un polaroid nella posizione standard verticale, O2 un analizzatore, R un rivelatore (sostituisce lo schermo: segnala l’intensità della energia ricevuta). Un fascio di luce venga emesso da P; se O1, O2 sono paralleli R segnala un massimo di energia ricevuta, se ortogonali il segnale R è nullo, nei restanti casi varia in ragione dell’angolo α fra f1,f2 .

Si riduca l’energia emessa da P fino a poter ritenere che un solo fotone sia emesso da P (è possibile farlo); si adatti R in modo che segnali con un “clic” l’arrivo su di esso di un singolo fotone. Al solito:

- a) O1,O2 sono paralleli: un clic segnala l’arrivo su R del fotone
- b) O1,O2 sono ortogonali: nessun “clic” viene emesso da R.

Ed ecco un fatto sorprendente.

Sia $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 90$ l’angolo fra f1,F2. per semplicità supponiamo $\alpha=45$. Il rivelatore R segnala **casualmente** l’arrivo di un fotone; in altre parole: non tutti i fotoni emessi vengono

segnalati da R: alcuni sì altri no e questo in modo del tutto casuale; se $n=45$ vengono segnalati da R circa la metà dei fotoni emessi.

Questi i fatti. Restiamo fedeli ai fatti.

Diremo “**apparato che definisce le condizioni al contorno**” tutto ciò che *percettivamente* (se vogliamo: *macroscopicamente*) costituisce la parte dell’apparato sperimentale che deve essere attivata *prima* di qualsiasi successiva “osservazione” Dunque ad es. un *pulsante* che “premuta” determina il fatto di osservare luce emessa da P, lo stesso *proiettore* P capace di emettere quantità minime di energia (ma non inferiore ad un “quanto”), il *polarizzatore* O1.

Diremo “**apparato di osservazione**” tutto ciò che “macroscopicamente” (dunque “percettivamente”) consente ad un osservatore di asserire che “qualche cosa” è successo; in questo caso ad es. la presenza di un *analizzatore* O2, un metodo per *misurare* \square , un *rivelatore* R.

Qui finisce la descrizione “macroscopica” di un possibile “esperimento” su di un “quanto” di energia elettromagnetica polarizzato.

Dobbiamo allora dire che P ha emesso un fotone? Possiamo dirlo: un fotone, un elettrone, altre diavolerie microscopiche nessuno le ha mai viste. Se lo diciamo allora costruiamo **modelli della realtà**. Ma P.A.M. Dirac (un “padre fondatore della MQ) avverte: «il principale scopo della fisica non è di fornire dei modelli, bensì di formulare delle leggi che governino i fenomeni. Se poi esiste un modello tanto meglio, intendo con “modello” un modo non contraddittorio di raffigurarsi i fenomeni».

E, sempre Dirac, avverte che le ragioni per cui avvengono, ad es. i fatti poco sopra descritti (ma anche la molteplicità dei fatti che riguardano “particelle”), non possono essere esaminate sperimentalmente e pertanto vanno considerate estranee al dominio scientifico. Se così stanno le cose allora su tutto ciò che avviene (nel caso qui descritto), fra l’“apparato al contorno” e quello di “osservazione” (presenza di “fotoni”, viaggio di questi lungo definite traiettorie, ...) nulla possiamo né dobbiamo dire. Einstein, Schrodinger, Bell affermano: “ogni teoria quantica per la sua stessa natura (la natura appunto di essere una ‘teoria’, dunque descrivibile ad un qualche livello **formale**), parla solo di ciò che troveremo se eseguiamo una misura, **non di ciò che esiste là fuori**”

Epistemico e non epistemico.

Ove si assuma **non contraddittoria e completa** la descrizione quantistica dei sistemi fisici, le probabilità quantistiche risultano, nel linguaggio dei filosofi della scienza, **non epistemiche**. Questo significa che l’uso, nell’ambito dei fatti microscopici, del calcolo delle probabilità *non può essere attribuito ad un qualsiasi tipo di ignoranza; i processi microscopici sono da considerarsi necessariamente casuali*.

Per rendere chiaro il significato di questa irriducibile aleatorietà dei processi microscopici vediamo di confrontarla con altri possibili casi nei quali tuttavia le probabilità risultino *epistemiche*, dunque dovute ad ignoranza; ad es. alla ignoranza del completo stato iniziale del sistema oggetto di studio.

Cominciamo con un banale esempio: il lancio di una moneta. Anche in questo caso, come si sa, per prevederne l’esito si ricorre alla teoria della probabilità. Ebbene è del tutto chiaro che le probabilità di cui qui si fa uso sono di natura epistemica, vale a dire: se si assume che la caduta della moneta sia governata da leggi classiche, allora si può asserire che se si conoscessero con precisione le condizioni al contorno del lancio (rotazione impressa alla moneta al momento del lancio, distribuzione delle molecole dell’aria, struttura della superficie su cui cadrà,...) potremmo prevedere con certezza l’esito che il lancio avrà. Sappiamo che non è così, ma sappiamo anche che in linea di principio potrebbe essere

appunto così: la descrizione in termini probabilistici di ciò che avviene non appartiene alla struttura della meccanica classica, essa è dovuta in modo essenziale alla nostra ignoranza.

E' ben nota in proposito l'asserzione di Pierre Simon de Laplace (1776): «l'ignoranza delle cause che concorrono alla formazione degli eventi ci impedisce di conseguire la certezza rispetto alla grande maggioranza dei fenomeni. Vi sono pertanto cose che per noi sono incerte ed altre più o meno probabili; noi cerchiamo di rimediare all'impossibilità di conoscere come stanno le cose determinando i loro diversi gradi di verosimiglianza. Accade così che alla debolezza della mente umana si debba una delle più fini ed ingegnose teorie matematiche, la scienza del caso o della probabilità».

Ma anche la meccanica classica ha subito un'evoluzione profonda che ha comportato in tempi recenti, alcune modifiche di estrema rilevanza concettuale alla posizione ora descritta. Sono stati infatti identificati molti processi in cui si presenta una estrema sensibilità alle condizioni iniziali, sensibilità che conduce a quello che è stato chiamato il caos deterministico della complessità.

Tecnicamente si denotano come **caotici** quei moti estremamente complicati che manifestano una amplificazione incredibilmente rapida degli errori e che pertanto, malgrado il determinismo classico a cui quei moti si suppongono soggetti, rendono praticamente impossibili previsioni a lungo termine.

I moti caotici esistono. E' ben noto il detto che "un batter d'ali di una farfalla a Rio può produrre un uragano in Florida": è stato calcolato che se l'Universo fosse costituito da una coppia di palle da biliardo che mutuamente si attraggono in ragione della forza gravitazionale, il sistema risulterebbe così sensibile, che la semplice introduzione in quello stesso Universo di un singolo elettrone potrebbe modificare sensibilmente le loro traiettorie: sistemi meccanici così sensibili alle condizioni iniziali, pur nel determinismo di principio che li regola, sono di fatto "imprevedibili".

Questa situazione era già stata preannunciata da Jules-Henry Poincaré agli inizi del secolo scorso; nel 1905 scriveva «... **può accadere** che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi: la previsione diviene impossibile e si ha un fenomeno fortuito».

Dunque esiste una profonda differenza tra l'assegnare agli eventi probabilità epistemiche, rilevanti nell'ambito della meccanica classica, ed assegnare invece probabilità non epistemiche, proprie della meccanica quantistica: la differenza è di natura concettuale e non pratica. In meccanica quantistica non ha alcun senso dire: volendo potremmo evitare l'uso del calcolo delle probabilità se.... NO: la teoria quantistica, **supposta non contraddittoria e completa**, è strutturata in modo tale che quel calcolo non può essere evitato .

Dal punto di vista classico, anche se l'Universo diventasse la memoria di un calcolatore ma tuttavia quel calcolatore non diventasse abbastanza potente da permetterci di immagazzinare le informazioni necessarie a prevedere per più di qualche minuto l'evoluzione di un semplice sistema, tutto ciò nulla toglierebbe alla decisione che la comunità scientifica, dopo Newton e confortata da tre secoli di successi, ha adottato di assumere come soggiacente alla dinamica del processo uno schema teorico per cui la necessità di ricorrere ad una descrizione probabilistica derivi ancora dalla ignoranza delle precise condizioni iniziali.

Al contrario, nello schema quanto-meccanico, l'aleatorietà degli esiti è incorporata nella struttura della teoria e pertanto neppure consente di **pensare** che **gli esiti** siano, sia pure

in un modo a noi sconosciuto, **predeterminati**: ciò che in effetti è predeterminato è solo la loro **probabilità di essere**.

Il gatto di Schrodinger: un confine ambiguo.

Ritorniamo ai polaroid di cui si è parlato. Per chiarire ancora una volta la novità del fenomeno della polarizzazione della luce riportiamo quanto in proposito ha scritto David Mermin: «...quando si guarda una sorgente luminosa attraverso un “sandwich” di **tre** polaroid , se si toglie il disco centrale, non si vede nulla, ma se esso viene reintrodotta il sandwich diviene trasparente. Aggiungendo un ostacolo riusciamo a far passar luce».

Introduciamo allora nella scatola che contiene il “gattino di Schrodinger” un sandwich di tre polaroid O1,O2,O3 disponendo *incrociati* i polaroid O1,O2 ed interponendo a 45° fra essi il polaroid O3. Conduciamo poi l'esperienza sostituendo alla coppia (O1,O2) la terna (O1,O3,O2). Il pulsante P si trovi all'esterno della scatola ed una finestrella consenta di osservare lo stato di vita o di morte del gattino. Piero e Mario siano due operatori: *Piero pigia il pulsante*, *Mario* aprendo la porta della finestrella *osserva* l'eventuale condizione di morte del gattino.

Se *Mario annuncia* la morte del gatto chi ha ucciso il gatto? Piero ovvero Mario?

La risposta della MQ appare strampalata: il colpevole è Mario!

E' facile capire la logica che conduce a questa conclusione anche se difforme dalle nostre consuete abitudini.

Il pulsante P, i polaroid O1 e O3 fanno parte dell'apparato macroscopico che determina le condizioni iniziali della prova sperimentale, O2 ed “il gattino” (che chiaramente fa le veci dello schermo usato in precedenza) fanno parte dell'apparato macroscopico che consente l'osservazione.

“Piero” *non appartiene all'apparato macroscopico iniziale*: l'esperimento può essere condotto non interessando ad esso alcun operatore. E' sufficiente un apparato automatico P che produca ad intervalli regolari “quanti” di energia elettromagnetica. Piero chiaramente non è un assassino.

“Mario”. P emette fotoni capaci di attraversare i nostri polaroid O1,O3, ed infine O2. L'unica cosa che chi conduce l'esperienza può dire è se il gatto (cioè un apparato rivelatore) sia vivo o morto. La MQ in proposito nulla asserisce. Quanto la teoria afferma in proposito appartiene al puro regno del diritto della repubblica dei matematici e fisici, non al regno di ciò che è ma di ciò che potrebbe essere. Ma l'essere è riconoscibile solo da una osservazione: è successo qualche cosa che non potevamo prevedere, che la teoria asseriva come possibile, che asseriva appartenere al mondo delle potenzialità, ma che solo l'osservazione, dunque il nostro cervello, dunque la nostra mente può assegnare al mondo di ciò che è. Prima della osservazione ogni fotone è un oggetto astratto puramente verbale la cui natura giuridica è data dalla sovrapposizione dello stato di polarizzazione verticale e polarizzazione orizzontale e solo all'atto della osservazione possiamo asserire che la luce assorbita dal ricevitore ha la qualità di una polarizzazione verticale. Se, come asserisce la teoria, entrambi gli stati non fossero fin dall'inizio pensati sovrapposti con assegnate probabilità di manifestarsi, non sarebbe giustificato il fatto che protrando nel tempo l'esperienza gli stati previsti si manifestano esattamente con le probabilità assegnate.

E' colpevole Mario!?

Ovviamente si vuol dire altro. E precisamente: sappiamo che un certo apparato, se attivato produce strane cose di cui nulla sappiamo; diciamo che quell'apparato, è casualmente la causa di un fatto poiché ogni volta che è stato attivato poteva probabilmente avvenire che

un gatto morisse, ma che esista una sequenza di cose quali un apparato, cose da questo prodotte e attive nello spazio che separa l'apparato dal gatto (ad es. la traiettoria di un fotone prodotto dall'apparato, un fotone che va da P ad M e che determina la rottura della fialetta e la morte del gatto) è una ipotesi che non può essere sostenuta. Un altro mondo descritto dal concetto di probabilità. Non Epistemica.

7.3. Perché il cielo é buio di notte?

E' a questo mondo di particelle che Monod si riferisce quando afferma «Gli eventi iniziali **elementari**, che schiudono la via dell'evoluzione ai sistemi profondamente conservatori rappresentati dagli esseri viventi sono **microscopici e fortuiti**.»

L'evoluzione biologica prende le mosse da una diversa fonte di "variazione" di natura più profonda: la storia del divenire del cosmo.

Ecco al riguardo una preziosa sequenza di date.

1859: 12 settembre.

L'astronomo Le Verrier rende noto un moto del perielio di Mercurio, irregolare nei riguardi della vigente teoria newtoniana del sistema planetario in cui viviamo.

1859: 20 ottobre.

Gustav Kirchhoff prova che il rapporto fra energia assorbita ed energia emessa da un corpo in equilibrio termico con la radiazione dipende solo dalla frequenza della radiazione e dalla temperatura assoluta. Passano ben quaranta anni prima che Max Karl Ernst Ludwig Planck esponga la legge che esprime quel rapporto (19 ottobre 1900): ha inizio la teoria dei quanti. Solo nel 1922 viene attribuito ad Einstein il premio Nobel per l'anno 1921 "...per la scoperta dell'effetto fotoelettrico"

1859: 24 Novembre.

Viene pubblicato a Londra "*Sull'origine della specie per selezione naturale, ovvero la conservazione delle razze più favorite nella lotta per l'esistenza*" (Charles Robert Darwin)

Sessanta anni dopo la comunicazione di Le Verrier, Einstein prova che il comportamento anomalo del pianeta Mercurio non richiede alcuna ipotesi particolare al riguardo ma rientra nelle naturali conseguenze dei risultati della teoria generale della relatività (1916).

La teoria generale della relatività è a fondamento della moderna cosmologia.

Ancora storia

1915: Einstein comunica le grandi idee della teoria della relatività generale

1917: Willem De Sitter osserva che nelle equazioni capaci di esprimere le idee fondanti la teoria della relatività generale e da cui discende la teoria einsteiniana della gravitazione è contenuta l'ipotesi della espansione dell'Universo.

1922: Aleksandr Fridman deduce dalle equazioni di Einstein la possibilità di un Universo non stazionario, di uno spazio curvo la cui curvatura spazialmente costante varia nel tempo

1924: Edwin Powell Hubble annuncia le prime evidenze telescopiche di un oggetto extra galattico: la nebulosa di Andromeda

- 1925: Hubble trova che le righe nello spettro delle galassie sono spostate verso il rosso, rispetto alla posizione che hanno negli spettri degli stessi elementi osservati in laboratori terrestri. Dunque tutte le galassie si stanno allontanando da noi e ognuna da ogni altra.
- 1927: George Edouard Lemaitre pubblica una soluzione delle equazioni di Einstein che descrive un modello dell'Universo in espansione, suggerendo che i moti delle galassie possono fornire una conferma di una concezione dinamica dell'Universo "per trovare una soluzione che presenti i vantaggi di quella di Einstein e di De Sitter siamo condotti a studiare un Universo einsteiniano in cui il raggio dello spazio vari in qualche modo". Avanza anche l'ipotesi che l'Universo abbia una origine da qualche "atomo primigenio" che avrebbe racchiuso in sé la materia ora presente nel cosmo e che, esplodendo, avrebbe dato origine all'espansione.
- 1929: Hubble pubblica la legge secondo cui la velocità di recessione di una galassia è direttamente proporzionale alla sua distanza dalla Terra.
- 1932: De Sitter e lo stesso Einstein pubblicano un modello di Universo che prevede la sua espansione a partire da un ben definito inizio nel tempo.
- 1947: Lemaitre. "Se vogliamo domandarci quali siano le condizioni iniziali idealmente semplici dalle quali ha potuto svilupparsi l'Universo, dobbiamo tener conto, prima di tutto, del fatto che l'energia, che attualmente è dispersa in un così grande numero di quanti, è stata un tempo ripartita in un numero minore di singoli pacchetti. Chiaramente se noi ci lasciamo trasportare dalla logica insita in questa idea della concentrazione quantistica iniziale, siamo condotti a pensare che l'inizio del mondo coincida con lo stato di concentrazione totale"
- 1948: George Gamow. L'Universo primordiale, racchiuso in un volume piccolissimo, doveva essere pervaso da una radiazione di altissima energia. A causa della espansione esso si sarebbe raffreddato portandosi a temperature di pochissimi gradi assoluti. Oggi dovrebbe essere riempito da una radiazione di bassa energia
- 1965: Arno Penzias, Robert Wilson scoprono appunto questa radiazione fossile originale.
- 1998: John Gribbin scrive "in astronomia l'osservazione fondamentale è che al giorno segue la notte,... questa singola osservazione è sufficiente a dirci che l'Universo ha avuto una origine in una epoca precisa nel passato, e che non è stato sempre come lo vediamo oggi.... Che cosa vediamo quando "guardiamo" nei vuoti tra le stelle e le galassie (con le nostre antenne radio)? Quel che scopriamo è il debole sibilo della radiazione cosmica di fondo, l'equivalente di luce a una temperatura di 2,7 gradi Kelvin. Questa è la radiazione elettromagnetica del tempo in cui l'Universo era pieno di radiazione e caldo come oggi la superficie del Sole. Senza l'espansione dell'Universo, tutto lo spazio sarebbe ancora così caldo come allora, e il cielo notturno sarebbe altrettanto splendente della superficie di una stella: l'espansione dell'Universo è quindi una delle ragioni per cui il cielo è buio di notte"
- "Perché il cielo è buio di notte?" è la domanda a cui nel 1823 ha tentato di rispondere un medico ed illustre astronomo, Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers.
Poco sopra è stata data la risposta di Gribbin (1998)

Per capirla vale forse la pena di porsi una domanda diversa “Perché il cielo è azzurro di giorno?” Ecco la risposta, in più tempi.

- Se osserviamo l'azzurro del cielo non volgiamo lo sguardo alla sorgente di luce (il Sole), ma l'osservazione avviene trasversalmente rispetto ai raggi solari.
- In questa situazione un treno di fotoni viaggia in una qualche direzione diversa da quella che congiunge il sole al nostro occhio.
- Allora ciò che vediamo NON sono fotoni emessi dal Sole.
- Possiamo supporre che la luce del Sole ecciti gli elettroni delle molecole dell'aria che così diventano sorgenti di luce.
- Se l'ipotesi è corretta noi vediamo, quando osserviamo l'azzurro del cielo, queste sorgenti secondarie.
- Lord Rayleigh ha provato che la potenza della luce (l'energia emessa nell'unità di tempo) così diffusa è inversamente proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda del “colore” della luce solare capace di eccitare le molecole dell'aria.
- Un piccolo calcolo che evitiamo (anche per gli addetti ai lavori) conduce al risultato che la luce azzurra è diffusa circa quattro volte di più di quanto lo sia la rossa.
- Per questo il cielo appare azzurro.

(Al tramonto il cielo è rosso: Ovvio Watson, ora guardiamo direttamente verso il Sole e pertanto riceviamo la sua luce che nel frattempo è stata depauperata, in direzione laterale, “dell'energia azzurra ” e pertanto trasmette, nella nostra direzione, “energia rossa”)

Coerente. Ma anche vero? (nel senso di verificabile). Fate una bella gita in montagna in una giornata di Sole: l'azzurro del cielo si inscurisce mano mano che si sale. Oltre i quattromila è pressoché nero. (Ovvio Watson! l'aria diviene via via più rarefatta, la diffusione laterale della luce sempre meno efficace, l'osservazione diretta del Sole richiama quella di una stella.)

Ma Gribbin direbbe: tutto è pervaso dalla radiazione primordiale, un debole invisibile sibilo alla temperatura di 2,7 gradi Kelvin.

7.4. Filosofia, Fisica, Matematica.

Ancora una sequenza di “flash”.

Essere e divenire hanno segnato, fin dalle sue origini, il pensiero occidentale, ma meccanica classica, quantistica , relatività costituiscono un trionfo dell'essere sul divenire.

La concezione di una natura passiva, soggetta a leggi deterministiche é peculiare dell'occidente.

Secondo Einstein l'uomo si ribella all'idea di essere un oggetto impotente in balia delle forze della natura, e tuttavia questa situazione è l'unica compatibile con gli insegnamenti della scienza.

Un secolo dopo Laplace, Einstein infatti scrive: «un essere dotato di una percezione superiore e di una intelligenza perfetta , considerando l'uomo e le sue opere, sorrirebbe dell'illusione di quest'ultimo di agire liberamente secondo una propria volontà. La legalità degli eventi, che si afferma in modo più o meno chiaro nella natura inorganica, dovrebbe essere esclusa dalle nostre attività cerebrali?»

Si è visto che la meccanica classica non prevede l'incertezza: è tuttavia indubbio che l'imprevedibile appartiene all'esperienza umana ma il "demone" di Laplace asserisce che essa è dovuta solo alla nostra ignoranza.

Poincaré (1905) ha provato che per la maggior parte dei sistemi dinamici, a partire dal sistema dei tre corpi, non è possibile definire l'evolversi nel tempo della loro traiettoria.

Prigogine ha tuttavia proposto come questo ostacolo possa essere superato tramite l'introduzione, nella descrizione dinamica, di elementi non newtoniani di natura statistica.

La descrizione statistica introdurrebbe così la possibilità di descrivere, all'interno della dinamica, processi irreversibili e la crescita stessa dell'entropia senza far riferimento a opportune semplificazioni ed approssimazioni .

Essa (la dinamica) allora nulla dovrebbe alla nostra ignoranza o ad un qualunque elemento antropocentrico.

La maggior parte dei sistemi dinamici corrispondenti ai fenomeni che ci circondano ammettono una descrizione che è incompatibile con una descrizione in termini di traiettorie.

Poiché una descrizione complessa ed irriducibile conduce ad una rottura della simmetria temporale (propria della meccanica classica), essa è pertinente alla descrizione di fenomeni irreversibili, e possiamo pertanto dire che essa è, al livello microscopico, l'equivalente del concetto di entropia .

Per Steven Weinberg, a tutti i livelli, in cosmologia come in geologia, in biologia come nell'ambito sociale si afferma il carattere evolutivo della realtà: come spiegarlo?

L'equazione di Schrodinger è deterministica, ma non è prevedibile l'esito delle nostre misurazioni: siamo allora noi, con le nostre misurazioni, i responsabili di ciò che sfugge ad un presunto determinismo universale, la descrizione della evoluzione cosmica è una nostra, e solo nostra, costruzione mentale?

I processi naturali segnano un verso nel divenire, un prima e un dopo. Lo abbiamo visto poco sopra: il concetto e la misura ci insegna a riconoscere quale fra due stati di un sistema isolato ???? dovremo dire il primo

Il tempo.

E' già stato osservato che ogni teoria fisica si fonda su concetti associati ad idealizzazioni che ne rendono possibile la formulazione matematica e pertanto che la fisica riduce il tempo al ruolo di un parametro poiché si limita allo studio di problemi semplici; ma in problemi complessi, il tempo non sarebbe una *proprietà emergente*?

Per Henri Bergson il tempo impedisce che tutto sia dato simultaneamente (così come asseriva Laplace nei riguardi del suo demone): il tempo "è ritardo", la sua esistenza dimostra che c'è indeterminazione nelle cose; realismo e indeterminismo sono strettamente legati .

Per Hawking il tempo non sarebbe che un carattere accidentale dello spazio, una delle sue dimensioni.

Questa spazializzazione del tempo sembra incompatibile tanto con l'Universo evolutivo quanto con l'esperienza umana.

E allora avverte che abbiamo bisogno della freccia del tempo per rendere ragione della vita intelligente: dunque un principio antropico, un ritorno al *clinamen* di Epicuro?

La mente.

Per Roger Penrose è la nostra attuale mancanza di comprensione delle leggi della natura a impedirci di esprimere il concetto di "mente" in termini fisici o logici .

L'Universo che ci circonda deve essere compreso a partire dal possibile, e non da un qualunque stato iniziale da cui potrebbe, in qualche modo essere dedotto: secondo Alfred North Whitehead il possibile deve diventare una categoria primordiale per ogni cosmologia razionale: la creatività è una categoria cosmologica .

Ma negare alla fisica ogni competenza nel problema del tempo comporta un prezzo troppo elevato: la scienza è un esempio unico di un dialogo fruttuoso fra l'uomo e la natura.

Galileo.

“La filosofia è scritta in quel grandissimo libro che continuamente sta aperto dinanzi ai nostri occhi (voglio dire l’universo), ma che non si intende se prima non si studia la lingua e si conoscono i caratteri in cui sta scritto. La lingua di quel libro è matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche”

Oggi Leon Rosenfeld sottolinea che ogni teoria si fonda su concetti associati ad idealizzazioni che ne rendono possibile la formulazione matematica e pertanto ogni concetto fisico è sufficientemente definito solo se si conoscono i limiti della sua validità, limiti derivanti dalle idealizzazioni che lo fondano .

Euclide ha fatto scuola : come è ben noto i suoi "Elementi" sono il primo trattato organico sulla natura dello spazio ambiente e costituiscono pertanto il primo capitolo della fisica. Forzando un poco le cose si potrebbe dire che, con l'opera di Lagrange si riteneva di averne scritto l'ultimo.

Sappiamo che non è così.

Ma dove si ferma, esiste un luogo (della mente, dello spirito) dove la Verità emerge?

Sappiamo quanto siano lontani i tempi e le dispute proprie dell'emergere, appunto con Galileo, del **metodo sperimentale**, quanto ormai esso sia radicato ed affinato. Ma forse questo non basta.

E così può avvenire di pensare che, ad es., il tempo di cui la cosmologia parla sia radicalmente altro da quello su cui l'uomo riflette nella sua interiorità. Si tratta, per così dire, di due "realtà" separate?

L'Aristotele del *Cielo* o l'Agostino delle *Confessioni* hanno vissuto credendosi avvolti da uno spazio finito, in un *cosmo* ben determinato in cui era facile trovare riferimenti assoluti. Ben diverso è l'Universo di cui parlano i cosmologi contemporanei

Il tempo dei cosmologi, l'esperienza personale e ineludibile del tempo, le questioni che tanto ci toccano della vita e della morte. Tutte esperienze che appartengono a questo tempo che c'è. Si tratta di liberare ognuna delle concezioni del tempo, tutte giustificate nel loro ambito, dalla superstizione di esprimere la Verità.

Esprimere la Verità, e anche le verità. Dunque la parola, il linguaggio. Il linguaggio incapace di esprimere il concetto di tempo perché nel momento in cui lo dico già non è più, il linguaggio che è capace di esprimere il paradosso di Zenone che tuttavia a sottili distinzioni temporali è legato.

Il linguaggio, i paradossi di Zenone, dunque la logica e la matematica.

La matematica. L'altro corno della citata opinione di Galileo. Non è il caso né il luogo per discutere della sua natura. Possono bastare poche righe.

Nel suo discorso inaugurale al convegno ecclesiale di Verona dello scorso autunno (2007) Benedetto XVI° (Joseph Ratzinger) ha ricordato:

*«...all'origine della nostra testimonianza di cristiani non c'è una decisione etica o una grande idea, ma l'incontro con la Persona di Gesù Cristo.. La fecondità di questo incontro si manifesta, in maniera peculiare e creativa, anche nell'attuale contesto umano e culturale, anzitutto in rapporto alla ragione che ha dato vita alle scienze moderne e alle relative tecnologie. Una caratteristica fondamentale di queste ultime è infatti l'impiego sistematico degli strumenti della matematica per poter operare con la natura e mettere al nostro servizio le sue immense energie. La matematica come tale è una creazione della nostra intelligenza: la corrispondenza fra le sue strutture e le strutture reali dell'universo - che è il presupposto di tutti i moderni sviluppi scientifici e tecnologici, già espressamente formulato da Galileo Galilei con la celebre affermazione che il libro della natura è scritto in linguaggio matematico - suscita la nostra ammirazione e pone una grande domanda. Implica infatti che l'universo stesso sia strutturato in maniera intelligente, in modo che esista una corrispondenza profonda tra la nostra ragione soggettiva e la ragione oggettivata nella natura. Diventa allora inevitabile chiedersi se non debba esservi un'unica intelligenza originaria, che sia la comune fonte dell'una e dell'altra. Così proprio la riflessione sullo sviluppo delle scienze ci riporta verso il **logos** creatore.*

Ed ecco un secondo testo. E' tratto da un libro di Jonas intitolato appunto "Dio è un matematico?"

"Il principio di comprensibilità, il germe della spiegazione, nel mondo greco è dunque dato da un sistema di totalità inserite in totalità più estese, l'estremo tutto il supremo uno nel molto che come un corpo vivente conferisce a se stesso il proprio fine: le parti e la loro funzione si inseriscono in questo tutto autonomo nella sintesi originaria "

Due testi profondamente diversi.

Il testo di Jonas è scritto in una visione **euclidea della matematica**. Gli Elementi di Euclide costituiscono infatti la prima grande sintesi dei saperi dell'epoca. Non sono un trattato di geometria - meglio: non solo un trattato di geometria - ma una grandiosa costruzione che per piccoli passi con paziente metodo deduttivo conduce dai pochi evidenti assiomi iniziali alla originaria visione unitaria del **Tutto**.

La splendida geometria euclidea!

Cartesio afferma:

“Erano quelle lunghe catene di ragionamenti, tutti semplici e facili, di cui di solito si servono i geometri nelle loro più difficili dimostrazioni, che mi avevano dato motivo di pensare che tutte le cose conoscibili dall’uomo si susseguissero nello stesso modo, e che alla sola condizione di non accettare per vere quelle che non lo sono e di osservare sempre l’ordine necessario per dedurre le une dalla altre, non potessero darsi conoscenze così remote da non poter infine esser raggiunte, né così nascoste che non potessero scoprirsi.”

Ma è proprio Cartesio che ci riporta alla visione galileiana della matematica così evidente nel testo di Bedetto XVI°. Le chiavi di lettura del mondo galileiano sono descritte in termini di triangoli e cerchi, dunque figure. Cartesio e poi Newton ed infine Maxwell sostituiscono il numero alle figure. La ragione strumentale della matematica sembra decisiva. La grande sintesi maxwelliana è in termini di numeri ed equazioni. Scritta sul finire dell’ottocento celebra il trionfo di un piccolo mondo felice: la fisica classica.

Trionfo effimero.

Pochi anni dopo Maxwell ecco le rivoluzioni culturali del secolo XIX°: relatività, meccanica quantistica, logica formale. Quelle di Einstein, di Bohr e Gødel sono rivoluzioni figlie di una tecnica raffinatissima, e tuttavia autentiche rivoluzioni culturali che toccano l’umano modo di conoscere.

Ed introducono un nuovo modo di fare matematica. Un ritorno ad Euclide, nel senso che come allora nella matematica si realizza la sintesi esplicativa del mondo.

Dove sta la verità delle costruzioni matematiche? La deduzione è il suo strumento ma lo stesso concetto aristotelico di deduzione in quelle rivoluzioni viene posto in discussione. La validità delle “deduzioni” appare incerta: la deduzione non garantisce la verità delle sue asserzioni.

Validità e verità: dopo Gødel il loro legame è divenuto più debole.

Per paradossale che possa apparire, con tranquillità si può dire che oggi il “vero” matematico si identifica con il “legale”: ciò che la repubblica dei matematici garantisce come tale.

Matematica dunque come scienza autonoma.

Una matematica che ha abbandonato la descrizione di semplici fatti percettivi e si è avventurata su difficili sentieri dove l’intuizione del reale è costituita dalla percezione di un complesso gioco di segni.

Ecco ora la matematica va liberamente per i suoi sentieri. Ma le sue libere costruzioni, complicati “puzzle” a cui è possibile dare un senso nel complesso della disciplina, possono essere e vengono assunte dai fisici. Non dunque o solo un linguaggio. Ben di più. Idee anticipatrici. Modelli certo, ma preesistenti alla loro natura di modelli.

Hardy è un matematico. Nella sua “Autobiografia di un matematico” (G.H.Hardy, *Apologia di un matematico*, De Donato, Bari, 1969) indugia a lungo nel rivendicare il carattere di “serva padrona” della matematica; ma quel carattere di servizio, certamente vero, non gli sta bene.

La matematica è un raffinatissimo “gioco”.

Ogni anno vengono pubblicati, sulle più autorevoli riviste del globo, circa un trentamila nuovi teoremi. Perché tanti giovani ingegni dovrebbero mai dedicarsi a così assorbenti ricerche? Per me l'unica risposta che valga è:

la Bellezza che soggiace a quanto stanno facendo.

Una Bellezza libera da ogni impaccio strumentale, capace di vivere nella Mente.

Sono, in proposito, ben note le osservazioni di Laplace (poste nella prefazione al suo trattato "*Saggio filosofico sulle probabilità*" - 1814):

«Dobbiamo quindi considerare lo stato dell'Universo come l'effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Una intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la collocazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottoporre questi dati alla analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero; nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi».